— PROBLÈME N° 1 —

TRAITEMENT DES POUSSIÈRES PAR ÉLECTROFILTRE

I. Champ électrique dans un électrofiltre

A. Champ électrique à vide et tension de seuil

1. D'après l'équation de POISSON, pour tout point M,
$$\Delta V(\mathrm{M}) = -\frac{\rho(\mathrm{M})}{\varepsilon_0}.$$
Mais, comme l'espace inter-électrode est supposé vide de charge, $\rho(\mathrm{M}) = 0$ et l'équation devient donc
$$\boxed{\Delta V(\mathrm{M}) = 0.}$$

2. (a) On se place dans le repère cylindrique $(\mathrm{O}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. Le système est invariant par révolution (angle θ) autour de l'axe $(\mathrm{O}, \vec{e}_z)$, et par translation d'axe $(\mathrm{O}, \vec{e}_z)$.

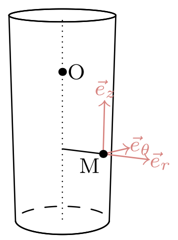


FIGURE A – Invariances du système

On en déduit que
$$\boxed{V(\mathrm{M}) = V(r).}$$
De plus, d'après le calcul du « laplacien » en coordonnées cylindriques, on a
$$\Delta(V) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right),$$
qui est nul car la zone inter-électrode est vide de charge. Ainsi, comme la dérivée $\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)$ est nulle,
$$r\frac{\partial V}{\partial r} = A,$$
où A est une constante. On a donc $\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{A}{r}$, que l'on peut intégrer en
$$V(r) = A\ln r + B,$$
où B est aussi une constante. Déterminons les valeurs de ces constantes à l'aide des conditions limites : on a $V(r_\mathrm{c}) = 0$ et $V(r_\mathrm{e}) = -U$ par hypothèse. Ainsi, d'après la première condition, on trouve
$$B = -A\ln r_\mathrm{c}$$
d'où, d'après la seconde condition,
$$A = \frac{U}{\ln(r_\mathrm{c}/r_\mathrm{e})}.$$
On en déduit donc l'expression du potentiel
$$\boxed{V(r) = U\frac{\ln(r/r_\mathrm{c})}{\ln(r_\mathrm{c}/r_\mathrm{e})}.}$$

(b) On sait que $\vec{E}(\mathrm{M}) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V(\mathrm{M})$. D'où, avec l'expression trouvée à la question précédente, on trouve, au contact avec l'émettrice
$$\boxed{\vec{E}(r_\mathrm{e}) = \frac{U}{\ln(r_\mathrm{c}/r_\mathrm{e})}\cdot\frac{1}{r_\mathrm{e}}\,\vec{e}_r.}$$
Après résolution, en U, de l'équation $E(r_\mathrm{e}) = E_0$, on trouve
$$\boxed{U_0 = E_0\, r_\mathrm{e}\, \ln(r_\mathrm{c}/r_\mathrm{e}).}$$

(c) On réalise l'application numérique, et on trouve $U_0 = 2{,}63 \times 10^4\ \mathrm{V}$.

3. (a) On remarque que l'expression de $V(\mathrm{M})$ est invariante par symétrie en y : $V(x, y, z) = V(x, -y, z)$. Et, d'après la géométrie de l'électrofiltre sec, le potentiel sur les collectrices est nul, ce qui est vrai avec l'expression de $V(\mathrm{M})$:
$$\begin{aligned} V(x, s, z) &= \frac{U}{\Lambda}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \ln\left(\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{\pi(x-2md)}{2s}\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{\pi(x-2md)}{2s}\right)}\right) \\ &= \frac{U}{\Lambda}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \ln 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

De plus, l'expression du potentiel $V(\mathrm{M})$ est invariante par translation d'axe $(\mathrm{O}z)$, ce qui est compatible avec les hypothèses de l'énoncé : les effets de bords sont négligés, les cylindres sont *infiniment* longs.

Pour déterminer la valeur de Λ, on utilise la condition limite $V(r_\mathrm{e}, 0, z) = -U$ au niveau de l'émettrice. On pose $\xi = \frac{\pi}{2s}(r_\mathrm{e} - 2md)$, et ainsi,

$$-U = V(r_\mathrm{e}, 0, z) = \frac{U}{\Lambda} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \ln\left(\frac{\operatorname{ch}\xi - 1}{\operatorname{ch}\xi + 1}\right).$$

On en déduit donc que

$$\boxed{\Lambda = -\sum_{m\in\mathbb{Z}} \ln\left(\frac{\operatorname{ch}\xi - 1}{\operatorname{ch}\xi + 1}\right).}$$

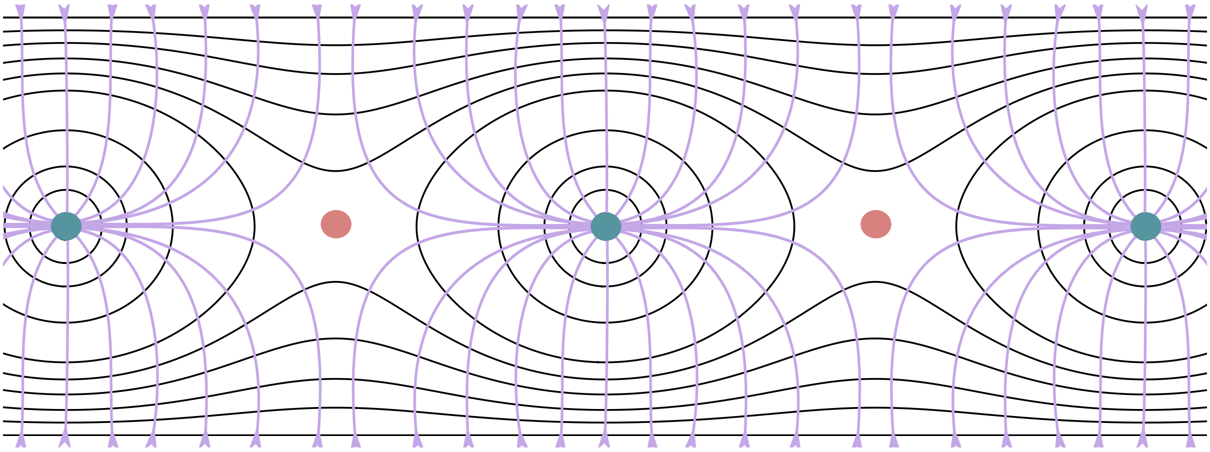


Figure B – Lignes de champ de $\vec{E}(\mathrm{M})$ pour l'électrofiltre sec

(b) On représente les lignes de champ de $\vec{E}(\mathrm{M})$ en violet sur la figure B. Les zones de fort champ $E(\mathrm{M})$ sont lorsque les lignes de champ se resserrent. Le champ est donc plus fort au niveau des émettrices (représentées en bleu sur la figure). Le champ $\vec{E}(\mathrm{M})$ s'annule à équidistance de deux émettrices, car les champs individuels de chaque émettrice se compensent. Ces points sont représentés en rouge sur la figure.

(c) Près de l'électrode émettrice, on mesure $|E_y| = 23{,}5 \cdot (U/s)$ d'après la figure 2 du sujet. Or, la ligne de champ passant par le point $\mathrm{M}(0, r_\mathrm{e}, 0)$ est parallèle à l'axe $(\mathrm{O}y)$, d'où $|E_y| = E_0$. Ainsi, on a

$$\boxed{U_0 = \frac{E_0}{23{,}5} s.}$$

Après application numérique, on trouve $U_0 = 2{,}81 \times 10^4\ \mathrm{V}$. Les valeurs de U_0 trouvées pour l'électrofiltre sec et humide ont le même ordre de grandeur : $U_0 \sim 10^4\ \mathrm{V}$.

B. Influence des charges d'espace

1. On sait que, dans les conducteurs ohmiques, $\vec{\jmath}(\mathrm{M}) = \rho(\mathrm{M}) \cdot \vec{v}(\mathrm{M})$. Or, d'après l'énoncé, $\vec{v}(\mathrm{M}) = -b\,\vec{E}(\mathrm{M})$. Et, comme l'espace inter-électrode est « peuplé » d'anions, de charge négative, $\rho(\mathrm{M}) < 0$. Ainsi, $\vec{\jmath}(\mathrm{M})$ est colinéaire et va dans le même sens que $\vec{E}(\mathrm{M})$. D'après la figure A, le courant i va donc des collectrices aux émettrices. Comme $\vec{\jmath}(\mathrm{M})$ et $\vec{E}(\mathrm{M})$ sont colinéaires, on en déduit que

$$\boxed{j(\mathrm{M}) = -b\,\rho(\mathrm{M})\,E(\mathrm{M}).}$$

2. On intègre l'expression trouvée à la question précédente sur une surface $\mathcal{S}$ cylindrique de

rayon r et de hauteur h :

$$\begin{aligned} i &= \iint_{\mathcal{S}} \vec{\jmath} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_{\text{sortant}} \\ &= \iint_{\mathcal{S}} j(\mathrm{M})\, \vec{e}_r \cdot \mathrm{d}S\,(-\vec{e}_r) \\ &= \iint_{\mathcal{S}} -j(\mathrm{M})\, \mathrm{d}S \\ &= \iint_{\mathcal{S}} b\,\rho(\mathrm{M})\, E(\mathrm{M})\, \mathrm{d}S \\ &= b\,\rho\, E \iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}S \\ &= b\,\rho\, E \cdot 2\pi\, r\, h. \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que

$$\boxed{\rho = \frac{i}{2\pi r h b E}.}$$

3. D'après l'équation de MAXWELL-GAUSS, on a

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E}(\mathrm{M}) = \frac{\rho(\mathrm{M})}{\varepsilon_0},}$$

qui exprime localement la modification du champ électrique $\vec{E}(\mathrm{M})$ par les charges (*i.e.* les ions). On utilise l'expression de ρ trouvée à la question précédente, et on a donc

$$\operatorname{div} \vec{E}(\mathrm{M}) = \frac{i}{2\pi\varepsilon_0 r h b E}.$$

Mais, en coordonnées cylindriques, la divergence du champ $\vec{E}$ est donnée par

$$\operatorname{div} \vec{E}(r,\theta,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial\,(r\,E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Par identification avec les deux formules, et comme $\vec{E}$ est radial, on trouve

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\,(rE)}{\partial r} = \frac{i}{2\pi\varepsilon_0 h b E},$$

d'où l'équation demandée :

$$\boxed{rE \cdot \frac{\mathrm{d}(rE)}{\mathrm{d}r} = \frac{ri}{2\pi\varepsilon_0 h b}.}$$

4. Avec le changement de variable $u = rE$, on intègre entre r et r_0 pour trouver

$$\int_r^{r_0} u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r = \int_r^{r_0} \frac{ri}{2\pi\varepsilon_0 h b}\,\mathrm{d}r$$

d'où

$$\left[\frac{u^2}{2}\right]_r^{r_0} = \frac{i}{2\pi\varepsilon_0 h b} \times \left[\frac{r^2}{2}\right]_r^{r_0},$$

et donc

$$\left({r_0}^2 {E_0}^2 - r^2\, E^2(r)\right) = \frac{i}{2\pi\,\varepsilon_0\, h\, b}\left({r_0}^2 - r^2\right).$$

Après simplification, on trouve

$$E^2(r) = \frac{1}{r^2}\left({r_0}^2 - {E_0}^2 - \frac{i({r_0}^2 - r^2)}{2\pi\,\varepsilon_0\, h\, b}\right).$$

On en déduit donc que

$$\boxed{E(r) = \sqrt{\left(\frac{r_0}{r}\,E_0\right)^2 - \frac{i}{2\pi\,\varepsilon_0\,h\,b}\left(\frac{{r_0}^2}{r^2} - 1\right)}.}$$

5. Si E devient grossièrement uniforme, alors

$$rE\frac{\mathrm{d}(rE)}{\mathrm{d}r} = rE \times E\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}r} = r\,E^2,$$

et donc, avec l'expression de la question 3, on trouve alors

$$r\,E^2 = \frac{r\,i}{2\pi\,\varepsilon_0\,h\,b}.$$

On conclut donc que, avec cette approximation,

$$\boxed{E = \sqrt{\frac{i}{2\pi\,\varepsilon_0\,h\,b}}.}$$

Après application numérique, on trouve $E = 0{,}20\ \mathrm{MJ}$.

6. On a $v = \|\vec{v}\| = b\,E = 62\ \mathrm{m/s}$. Et, d'après la question 2, on a

$$\rho(r_\mathrm{e}) = -\frac{i}{2\pi\,r_\mathrm{e}\,h\,b\,E} = -1{,}4 \times 10^{-5}\ \mathrm{C/m^3}.$$

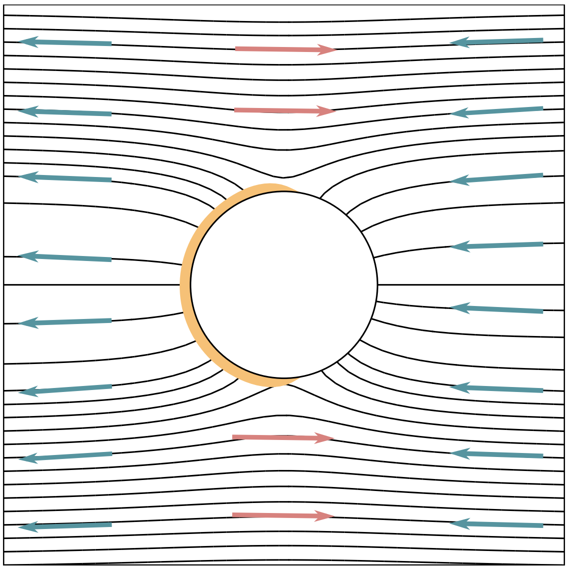
Le nombre d'ions par centimètre cube est

$$\begin{aligned} \frac{\rho(r_\mathrm{e})}{-e} &= 89 \times 10^{12}\ \text{ions/m}^3 \\ &= 89 \times 10^{6}\ \text{ions/cm}^3. \end{aligned}$$

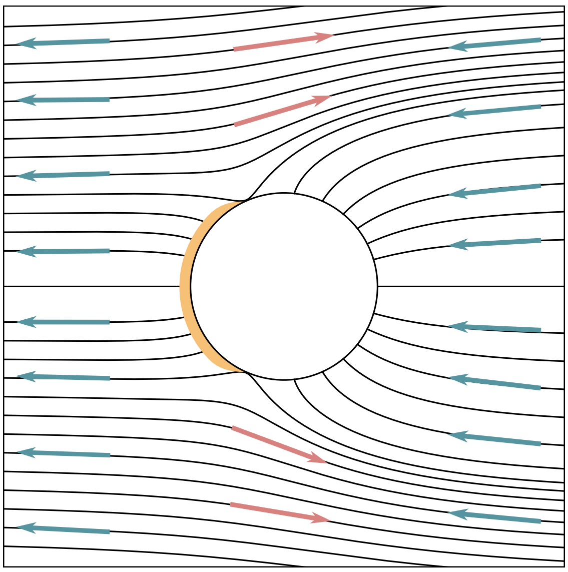
II. Comportment des poussières dans l'électrofiltre

A. Charge d'une particule sphérique : modèle de PAUTHENIER

1. (a)



$Q = 0$



$Q < 0$

FIGURE C – Lignes de champ autour d'un grain de poussière pour $Q = 0$ (en haut) et pour $Q < 0$ (en bas). Les anions sont représentés en rouge, le champ $\vec{E}$ est représenté en bleu.

(b) Le champ $\vec{E}_1(\mathrm{M})$ correspond à celui créé par une boule chargée de rayon a et de charge uniforme Q. Analysons les symétries et invariances : les plans $\Pi_1(\mathrm{M}, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $\Pi_2(\mathrm{M}, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ sont de symétrie des charges, donc du champ $\vec{E}_1$. De plus, le système est invariant par révolution autour de l'axe $(\mathrm{O}, \vec{u}_r)$ et l'axe $(\mathrm{O}, \vec{u}_z)$. On en déduit

$$\vec{E}_1(\mathrm{M}) = E_1(r)\,\vec{u}_r.$$

On applique le théorème de GAUSS sur une sphère $\mathcal{S}$ de rayon $r \geqslant a$:

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}_1(\mathrm{M}) \cdot \mathrm{d}\vec{S}_{\text{sortant}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Or, on a

$$\begin{aligned}\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}_1(\mathrm{M}) \cdot \mathrm{d}\vec{S}_{\text{sortant}} &= \oiint_{\mathcal{S}} E_1(r)\vec{u}_r \cdot \mathrm{d}S\,\vec{u}_r \\ &= \oiint_{\mathcal{S}} E_1(r)\,\mathrm{d}S \\ &= E_1(r) \cdot \oiint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}S \\ &= E_1(r) \cdot 4\pi r^2.\end{aligned}$$

Ainsi, après simplification, on en déduit que

$$\boxed{\vec{E}_1(r) = \frac{Q}{4\pi r^2\,\varepsilon_0}\vec{u}_r.}$$

Sur la figure C, on représente en orange la portion de la sphère d'où partent, vers des valeurs croissantes de r, les lignes de champ de $\vec{E}(\mathrm{M})$. Ainsi, cette portion est plus importante pour $|Q| > 0$ (haut) que pour $Q = 0$ (bas). L'accroissement de $|Q|$ a donc tendance à élargir cette portion de sphère. Cet accroissement s'oppose ainsi à l'arrivée de nouveaux anions, de charge négative, sur la sphère.

(c) Les lignes de champ de $\vec{E}(\mathrm{M})$ sont si distordues qu'aucun anion n'arrive au grain de poussière lorsque $\vec{E}_\mathrm{t}$ n'a plus de composante radiale, ou elle est strictement négative. Autrement dit, on cherche la valeur maximale de la charge Q telle que $\vec{E}_\mathrm{t}(\mathrm{M}) \cdot \vec{u}_r > 0$, reste vrai pour certains points M. Au vu de la figure C, le dernier point M vérifiant cette condition se situe à $\theta = \pi$ et à $r = a$. Avec cette condition, on a $\vec{E}(\mathrm{M}) = E\vec{u}_z = -E\vec{u}_r$, et donc

$$\vec{E}_\mathrm{t} \cdot \vec{u}_r = -E + 2E\cos\theta \frac{\varepsilon_\mathrm{r} - 1}{\varepsilon_\mathrm{r} + 2}\frac{\cancel{a^3}}{\cancel{a^3}} + \frac{Q_{\text{lim}}}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

qui est nul. D'où,

$$\boxed{Q_{\text{lim}} = 4\pi\varepsilon_0 a^2 E \cdot \left(1 + 2\frac{\varepsilon_\mathrm{r} - 1}{\varepsilon_\mathrm{r} + 2}\right).}$$

(d) On réalise l'application numérique, et on trouve

$$Q_{\text{lim}} = -1{,}39 \times 10^{-16}\ \mathrm{C} = 869 \times (-e).$$

2. (a) La dimension de $v = bE$ est $[v] = [b] \cdot [E] = \mathsf{L} \cdot \mathsf{T}^{-1}$. Et, d'après le théorème de GAUSS, on a $\oiint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q/\varepsilon_0$, d'où

$$[\varepsilon_0] = \frac{[Q]}{[E] \cdot \mathsf{L}^2} = \frac{[Q] \cdot [b]}{[v] \cdot \mathsf{L}^2} = \frac{\mathsf{T} \cdot [Q] \cdot [b]}{\mathsf{L}^3}.$$

Également, $[\rho] = [Q] \cdot \mathsf{L}^{-3}$. Par identification, on trouve $[\varepsilon_0] = [\rho] \cdot [b] \cdot \mathsf{T}$. Comme la dimension de τ_Q est $[\tau_Q] = \mathsf{T}$, on en déduit que

$$\boxed{\tau_Q = 4\frac{\varepsilon_0}{|\rho| \cdot b}.}$$

(b) On cherche une valeur de t telle que $t/(t + \tau_Q) = 90\,\%$. D'où,

$$t_{90}(0{,}90 - 1) = -0{,}90\,\tau_Q.$$

On en déduit

$$t_{90} = \frac{0{,}90\,\tau_Q}{1 - 0{,}90}.$$

On trouve, par application numérique, $\tau_Q = 2{,}3\,\mathrm{ms}$, d'où $t_{90} = 21\,\mathrm{ms}$.

(c) Le temps nécessaire théorique pour qu'un grain de poussière traverse l'électrofiltre serait de $t = 10\,\mathrm{s}$. Or, d'après la question précédente, le temps nécessaire pour que ce grain de poussière soit chargé à 90 % de sa charge maximale est de 21 ms $\ll$ 10 s. Ainsi, les grains de poussières sont, presque instantanément chargés.