Problème n° 2* : Motorisation ultra-sonore d'un autofocus

Questions III.A.1

(*a*) Si la barre était infiniment souple, elle vérifierai l'équation d'onde de d'Alembert sans pertes :
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0.$$
Ses solutions générales sont de la forme d'une somme de deux ondes, une progressive et une régressive :
$$F(x - ct) + G(x + ct).$$

(*b*) La barre ayant une rigidité importante, elle n'est pas négligeable comme dans le cas d'une corde souple. C'est pour cela que l'équation différentielle ne correspond pas à l'équation de d'Alembert.

(*c*) De l'équation différentielle de l'énoncé, on en déduit que
$$\left[\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}\right] = \left[\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right] \times \left[\gamma^2\right].$$
D'où,
$$\left[\gamma^2\right] = \frac{\left[\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}\right]}{\left[\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right]} = \frac{\mathrm{L}\cdot\mathrm{L}^{-4}}{\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}} = \left(\frac{\mathrm{T}}{L^2}\right)^2.$$
On en déduit donc que $[\gamma] = \mathrm{T}\cdot\mathrm{L}^{-2}$. Ainsi, l'unité de γ serait $\mathrm{s/m^2}$.

(*d*) L'onde ayant pour forme
$$\underline{z}(x,t) = \underline{Z}\exp\big(\mathrm{j}(\omega t - \underline{k}x)\big)$$
est une onde progressive si ω et $\underline{k}$ sont des réels du même signe, et non nuls.

(*e*) On utilise l'équation différentielle donnée et la forme de $\underline{z}$ complexe : on a
$$\Big((\mathrm{j}\underline{k})^4 + \gamma^2(\mathrm{j}\omega)^2\Big)\,\underline{z} = 0$$
d'où, $\underline{k}^4 - \gamma^2\omega^2 = 0$, et donc $\underline{k}^2 = \gamma\omega$, d'où
$$\underline{k} = \sqrt{\gamma\omega}.$$
Or, la vitesse de phase v_φ s'écrit de la forme
$$v_\varphi = \frac{\omega}{\underline{k}} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega\gamma}} = \sqrt{\frac{\omega}{\gamma}}$$
qui dépend de ω. La barre est donc un milieu dispersif.

(*f*) La barre reposant, à tout instant t, sur les supports à chaque extrémités de celle-ci, on a donc
$$\forall t,\ z(x=0,t) = z(x=L,t) = 0.$$
Une onde plane progressive ne respecte pas ces contraintes, mais c'est le cas d'une onde stationnaire.

Questions III.A.2

(*a*) Afin de respecter les conditions limites, on doit avoir un ventre à chaque extrémité de la barre. Ainsi, on doit donc avoir $L = n\lambda$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

(*b*) Comme le vecteur d'onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ est quantifié, on a donc
$$k_n = \frac{2\pi n}{L}.$$
Et, comme la pulsation $\omega = \frac{k^2}{\gamma}$ est également quantifiée, on en déduit que
$$\omega_n = \frac{4\pi^2 n^2}{\gamma L^2}.$$

Questions III.B.1

(*a*) Les nœuds de vibrations sont situés entre les unités de polarisation. En effet, la polarisation de chaque côtés de ces nœuds est inversée.

(*b*) On utilise les modes vibratoires : la figure 7 représente 9 nœuds. De plus, la longueur d'arc entre les nœuds est de $\lambda/2 = R\times\pi/9$ (l'angle est de $20° = \pi/9$) d'après la figure 7. Or, comme $k = 2\pi/\lambda$, on en déduit que $k = R/9$. D'où
$$\omega = \frac{k^2}{\gamma} = \frac{81}{\gamma R^2}.$$

Questions III.B.2

(*a*) On calcule $z_1(s,t) + z_2(s,t)$:
$$\begin{aligned} &z_1(s,t) + z_2(s,t) \\ &= Z\big(\cos(ks+\psi_1)\cos(\omega t+\varphi_1) \\ &\quad + \cos(ks+\psi_2)\cos(\omega t+\varphi_2)\big) \end{aligned}$$

Et, d'autre part, on développe $z(s,t)$:

$$\begin{aligned}
z(s,t) &= Z\cos(ks+\omega t+\varphi_1-\psi_1)\\
&= Z\big(\cos(ks+\psi_1)\cos(\omega t+\varphi_1)\\
&\quad +\sin(ks+\psi_2)\sin(\omega t+\varphi_2)\big)
\end{aligned}$$

L'égalité $z = z_1 + z_2$ n'est possible que si

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1 \quad \text{et} \quad \psi_2 = \frac{\pi}{2} - \psi_1.$$

(*b*) Comme il y a un déphasage en temps de $-\frac{\pi}{2}$ entre U_2 et U_1, on en déduit qu'il y a un déphasage en longueur de

$$\frac{-\pi/2}{2\pi} = -\frac{\lambda}{4}.$$

Ainsi, la longueur de l'arc moyen de l'électrode auxiliaire est de $\lambda/4$. On en déduit que la longueur de l'arc moyen de l'électrode GND est de $\lambda - (\lambda/4) = {}^3/_4 \times \lambda$.

(*c*) Afin d'inverser le sens du rotor, le déphasage entre U_2 et U_1 doit être de $\pm\frac{\pi}{2}$. Or, on a vu précédemment que ce déphasage valait $\frac{\pi}{2}$. Ainsi, on calcule le déphasage lié à la fonction de transfert $\underline{H} = \underline{U}_2/\underline{U}_1$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Arg}(\underline{H})\\
&= \mathrm{Arg}(1+\mathrm{j}R'C\omega) - \mathrm{Arg}(1-\mathrm{j}R'C\omega)\\
&= \mathrm{Arctan}(R'C\omega) - \mathrm{Arctan}(-R'C\omega)\\
&= 2\,\mathrm{Arctan}(R'C\omega)
\end{aligned}$$

D'où, $\mathrm{Arctan}(R'C\omega) = \frac{\pi}{4}$. On en déduit donc que

$$R'C\omega = 1.$$

(*d*) Si on modifie R' ou C de telle sorte que $R'C\omega = 1$, alors le signal U_2 sera donc inversé. La rotation du stator sera donc inversée : en effet, comme vu dans la question III.B.1.*b*, on a donc $\varphi_2 = \varphi_1 - \frac{\pi}{2}$, ce qui inverse le sens de propagation du signal z.