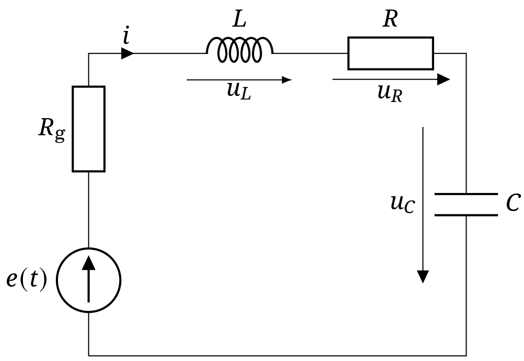
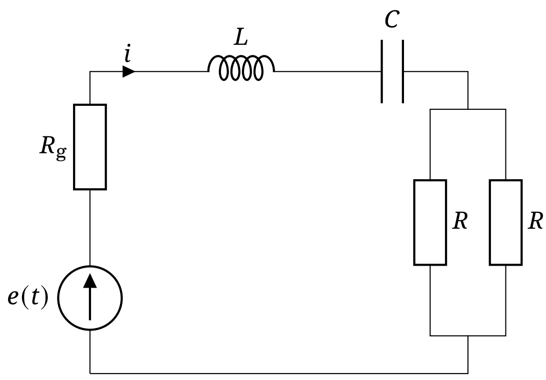
Problème n° 2 : Étude de circuits



(a) Circuit A



(b) Circuit B

Figure I – Les circuits A et B comme décrit dans l'énoncé

Question 1

Comme le signal, dans les deux circuits, est sinusoïdal, on détermine la fonction de transfert de chacun des circuit. Dans le circuit A, on réalise un pont diviseur de tension pour u_R, et on a donc

$$\underline{H}_{\mathrm{A},R}(\mathrm{j}\omega) = \frac{R}{R + R_\mathrm{g} + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \mathrm{j}L\omega} = \frac{\mathrm{j}RC\omega}{1 + \mathrm{j}C\omega(R + R_\mathrm{g}) - LC\omega^2}.$$

On peut donc déterminer une expression du facteur de qualité $Q_{\mathrm{A},R}$ et de la pulsation propre $\omega_{0,\mathrm{A},R}$:

$$\omega_{0,\mathrm{A}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

et

$$Q_\mathrm{A} = \frac{1}{R + R_\mathrm{g}}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

On s'intéresse à présent au circuit B. La resistance équivalente aux deux résistances en parallèle est $R/2$. De même, à l'aide d'un pont diviseur de tension, on a

$$\underline{H}_{\mathrm{B},R_{\text{éq}}}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\frac{R}{2}}{\frac{R}{2} + R_\mathrm{g} + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \mathrm{j}L\omega} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{j}RC\omega}{1 + \mathrm{j}C\omega\left(\frac{R}{2} + R_\mathrm{g}\right) - LC\omega^2}$$

D'où

$$\omega_{0,\mathrm{B}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q_\mathrm{B} = \frac{1}{\frac{R}{2} + R_\mathrm{g}}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Comme l'expression de $\omega_{0,\mathrm{A}}$ et celle de $\omega_{0,\mathrm{B}}$ est identique, pour la suite de l'exercice, on note ω_0 cette pulsation propre.

Des deux fonctions de transfert précédentes, on en déduit les gains $G_{\mathrm{A},R}$ et $G_{\mathrm{B},R}$: pour les circuits A et B,

$$G_R = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}.$$

Comme $Q_\mathrm{B} > Q_\mathrm{A}$, on en déduit $G_{\mathrm{B},R} < G_{\mathrm{A},R}$. La courbe bleue correspond donc à une mesure de la tension aux bornes de la résistance du circuit A, et la verte à la résistance du circuit B.

En basse fréquence, la tension aux bornes d'une bobine est nulle. Comme ce n'est pas le cas des courbes de la figure 2, on en déduit qu'il s'agit de condensateurs.

À présent, on détermine les fonctions de transfert aux bornes du condensateur à l'aide d'un pont diviseur de tension :

$$\underline{H}_{\mathrm{A},C}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}}{R + R_\mathrm{g} + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \mathrm{j}L\omega} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}C\omega(R + R_\mathrm{g}) - LC\omega^2}$$

et, de même

$$\underline{H}_{\mathrm{B},C} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}C\omega\left(\frac{R}{2} + R_\mathrm{g}\right) - LC\omega^2}.$$

On en déduit l'expression du gain $G_{\mathrm{A},C}$ et $G_{\mathrm{B},C}$:

$$G_C = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}.$$

On remarque que, comme $Q_\mathrm{B} > Q_\mathrm{A}$, $G_{\mathrm{A},C} > G_{\mathrm{B},C}$. Dans la figure 2, la courbe bleue correspond donc au circuit B et la verte au circuit A.

Question 2

En basse fréquence, dans le circuit A, on a $E = u_L + u_R + u_C$, or, u_L et u_R sont nulles. On en déduit $E = u_L$ en basse fréquence. D'où $E = 15$ V.

À l'aide d'une mesure sur le graphique, on détermine la bande passante des circuits A ($\Delta\omega_\mathrm{A}$) et B ($\Delta\omega_\mathrm{B}$) sur la figure 1. On a ${}^{u_{\mathrm{A},R,\max}}/_{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$ V $\cong$ 7,1V. D'où $\Delta\omega_\mathrm{A} \cong 250$Hz. De même, avec le graphe du circuit B :

$$\frac{u_{\mathrm{B},R,\max}}{\sqrt{2}} \cong 5{,}3\text{ V} \quad \text{d'où} \quad \Delta\omega_\mathrm{B} = 150\text{ Hz}.$$

Les mesures de bande passante sont représentées sur la figure II.

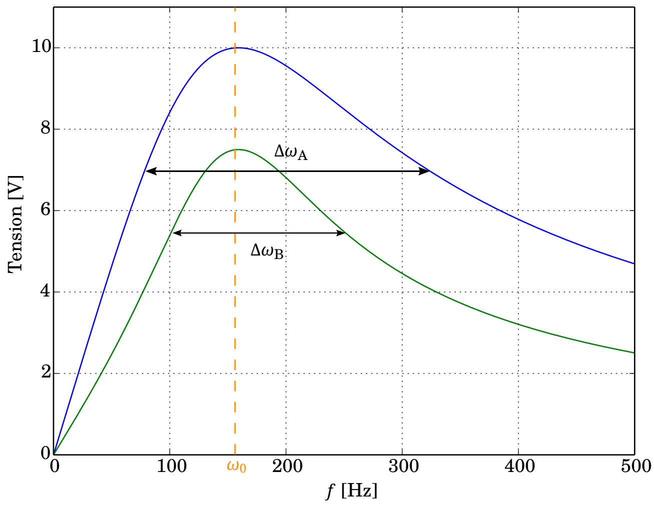


Figure II – Mesure de $\Delta\omega_\mathrm{A}$, $\Delta\omega_\mathrm{B}$ et ω_0

Or, on sait que $\Delta\omega_\mathrm{A} = {}^{\omega_0}/_{Q_\mathrm{A}}$ et $\Delta\omega_\mathrm{B} = {}^{\omega_0}/_{Q_\mathrm{B}}$. Après lecture graphique, comme montré sur la figure II, on a $\omega_0 \cong 160$ Hz. On en déduit donc la valeur de Q_A et Q_B :

$$Q_\mathrm{A} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_\mathrm{A}} \cong 0{,}64 \qquad \text{et} \qquad Q_\mathrm{B} \cong 1{,}07.$$

Nous pouvons désormais déterminer R_g, R, C, et L. On sait que $C = {}^1/_{L\omega_0^2}$, d'où

$$Q_\mathrm{A} = \frac{1}{R+R_\mathrm{g}}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{L\omega_0}{R+R_\mathrm{g}},$$

d'où $L = \frac{1}{\omega_0}Q_\mathrm{A}(R+R_\mathrm{g})$, et, de même, $L = \frac{1}{\omega_0}Q_\mathrm{B} \times \left(\frac{R}{2}+R_\mathrm{g}\right)$. Donc $Q_\mathrm{A}(R+R_\mathrm{g}) = Q_\mathrm{B}\left(\frac{R}{2}+R_\mathrm{g}\right)$. D'où

$$R = \frac{Q_\mathrm{B}-Q_\mathrm{A}}{Q_\mathrm{A}-\frac{1}{2}Q_\mathrm{B}} \cdot R_\mathrm{g}.$$

On déduit également que $C = {}^1/_{\omega_0 Q_\mathrm{A}(R+R_\mathrm{g})}$. On utilise la valeur mesurée sur le graphe. On sait que le gain $G_{\mathrm{A},C}$ s'écrit de la forme

$$G_{\mathrm{A},C} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(\frac{\omega}{Q_\mathrm{A}\omega_0}\right)^2}}.$$

Nous n'avons pas réussi à déterminer les valeurs numériques de R, R_g, C et L. Nous avons trouvés 3 équations pour 4 inconnues. Les expressions de R, L et C sont toutes en fonction de R_g et des constantes ω_0, Q_A, Q_B :

$$\boxed{R = \frac{Q_\mathrm{B}-Q_\mathrm{A}}{Q_\mathrm{A}-\frac{1}{2}Q_\mathrm{B}} \cdot R_\mathrm{g}}\ ;$$

$$\boxed{C = \frac{1}{\omega_0 Q_\mathrm{A}(R+R_\mathrm{g})}}\ ;$$

$$\boxed{L = \frac{1}{\omega_0}Q_\mathrm{A}(R+R_\mathrm{g}).}$$

Question 3

Afin de réaliser un filtre passe-haut, on utilise la tension aux bornes de la bobine comme tension de sortie. En effet, la fonction de transfert s'écrit de la façon suivante :

$$\underline{H}_{\mathrm{A},L}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\mathrm{j}L\omega}{R + R_\mathrm{g} + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \mathrm{j}L\omega} = \frac{-LC\omega^2}{1 + \mathrm{j}C\omega(R+R_\mathrm{g}) - LC\omega^2}$$

et on recoonnaît la forme d'un filtre passe-haut d'ordre 2. On représente son diagramme de Bode sur la figure III.

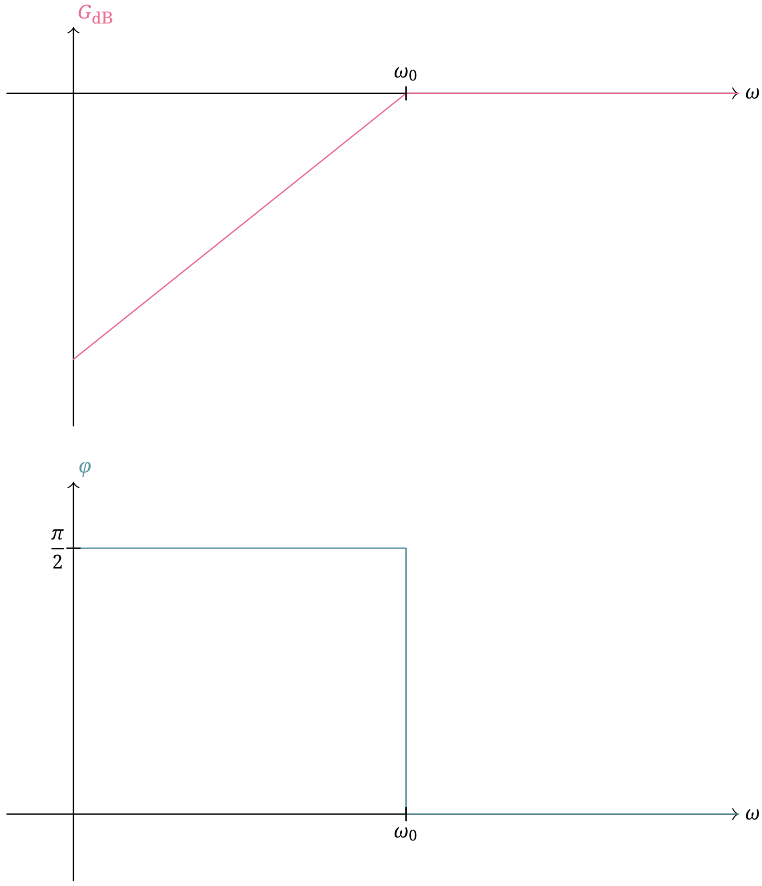


Figure III – Forme du diagramme de Bode du filtre passe-haut décrit dans la question 3, en gain G_{dB} et en phase φ