$\mathbf{DM_1}$ Mathématiques

1. (a) Soit $n \geqslant 2$. On a

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \times \sin^{n-1}\theta \, \mathrm{d}\theta$$

et donc, par intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} I_n &= \big[-\cos\theta \times \sin^{n-1}\theta\big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos\theta) \times (n-1)\sin^{n-2}\theta \, \mathrm{d}\theta \\ &= \boxed{(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin^{n-2}\theta \, \mathrm{d}\theta.} \end{aligned}$$

(b) Soit $n \geqslant 2$. D'après le théorème de Pythagore, on sait que, pour tout $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$. Ainsi, avec l'expression de I_n démontrée dans la question précédente, on obtient

$$\begin{aligned} I_n &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)\sin^{n-2}\theta \, \mathrm{d}\theta \\ &= (n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}\theta \, \mathrm{d}\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta \, \mathrm{d}\theta\right) \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$(n-1)I_{n-2} = (n-1+1)I_n \quad \text{d'où} \quad \boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.}$$

(c) Soit $n \geqslant 2$ et soit $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On sait donc que $\sin\theta \in [0,1]$. Ainsi,

$$\sin^{n-1}\theta \leqslant \sin^n\theta$$

et, donc

$$\boxed{I_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}\theta \, \mathrm{d}\theta \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta \, \mathrm{d}\theta = I_n.}$$

(d) Comme la suite (I_n) est décroissante, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n-1} \leqslant I_n$ et, en composant avec la fonction inverse, et et multipliant par I_n, on obtient

$$\boxed{\frac{I_n}{I_{n-1}} \leqslant \frac{I_n}{I_n} = 1}.$$

Également, d'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$\frac{n-1}{n} = \frac{I_n}{I_{n-2}} \leqslant \frac{I_{n-1}}{I_{n-2}}.$$

car la suite (I_n) est décroissante. On effectue un changement le variables $n \to n+1$ et on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\frac{n}{n+1} \leqslant \frac{I_n}{I_{n-1}}.}$$

(e) Soit $n \geqslant 2$. On a, d'après la question (c),

$$n\, I_n = (n-1)I_{n-2}.$$

Or, en multipliant des deux côtés par I_{n-1}, on obtient

$$n\,I_n\,I_{n-1} = (n-1)I_{n-1}I_{n-2}.$$

Comme ce résultat est vrai pour toute valeur de n supérieure à 2, la suite (nI_nI_{n-1}) est constante. Nommons cette constante α.
On pose $n=2$, ainsi on a $2\,I_2\,I_1 = \alpha$. On calcule donc I_1 :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \;\mathrm{d}\theta = \big[-\cos\theta\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Puis, I_2 :

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \;\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2\theta)}{2} \;\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\left(\big[\theta\big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\big[\sin 2\theta\big]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{4} + 0.$$

On en déduit donc que

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2}.}$$

(f) On sait, d'après la question (d), que, pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$\frac{n}{n+1} \leqslant \frac{I_n}{I_{n-1}} \leqslant \frac{I_n}{I_n} = 1.$$

Or, en passant à la limite, pour n tendant vers $+\infty$, on obtient, par le théorème des gendarmes

$$\frac{I_n}{I_{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{et donc} \quad I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{n-1}.$$

Or, comme la suite $(n\,I_n\,I_{n-1})$ est constante et vaut $\frac{\pi}{2}$, on a

$$\frac{\pi}{2} = n\,I_n\,I_{n-1} \sim n\,{I_n}^2 \quad \text{d'où} \quad {I_n}^2 \sim \frac{\pi}{2n}.$$

On en déduit que

$$\boxed{I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

(g) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la question (b), on a

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \frac{2k-1}{2k} \times \frac{2k-3}{2k-2} I_{2k-4}.$$

En itérant ce procédé, on obtient

$$\begin{aligned}
I_{2k} &= \frac{(2k-1)(2k-3)(2k-5)\cdots 3}{(2k)(2k-2)\cdots 4} I_2 \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{k}(2i+1)}{\prod_{i=2}^{k}(2i)} I_2 \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{k}(2i+1)}{\prod_{i=1}^{k}(2i)} 2I_2 \\
&= \frac{(2k)!}{\left(\prod_{i=1}^{k}(2i)\right)^2} 2I_2 \\
&= \frac{(2k)!}{(2^k)^2\,(k!)^2} 2I_2 \\
&\boxed{= \frac{(2k)!}{4^k\,(k!)^2}\,\frac{\pi}{2}.}
\end{aligned}$$

(h) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a, d'après la question (f),

$$I_{2k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4k}}.$$

Or, dans la question (g), on a également montré que

$$I_{2k} = \frac{(2k)!}{4^k\,(k!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit, donc que

$$\frac{(2k)!}{(k!)^2} \sim 4^k \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{4k\pi}} = 4^k\sqrt{\frac{4\pi}{4k\pi^2}}.$$

On en conclut que

$$\boxed{\frac{(2k)!}{(k!)^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{4^k}{\sqrt{k\pi}}.}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait, tout d'abord, que $\ln(n!) = \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n$ et donc, en procédant à l'aide d'une comparaison série-intégrale, on obtient l'inéquation suivante :

$$\int_2^{n+1} \ln x \; \mathrm{d}x \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln k \geqslant \int_1^n \ln x \; \mathrm{d}x.$$

Or, une primitive de $\ln x$ est $x\ln x - x$. On en conclut donc l'inéquation devient

$$(n+1)\ln(n+1) - n - 2\ln 2 + 1 \geqslant \ln(n!) \geqslant n\ln n - n + 1.$$

On divise cette inéquation par $n\ln n$ (qui ne s'annule pas) et on étudie la limite du membre de droite et celui de gauche :

$$\frac{(n+1)\ln(n+1) - n - 2\ln 2 + 1}{n\ln n} \geqslant \frac{\ln(n!)}{n\ln n} \geqslant \frac{n\ln n - n + 1}{n\ln n}$$
$$\iff \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\to 1} \times \underbrace{\frac{\ln(n+1)}{\ln n}}_{\to 1} - \underbrace{\frac{n}{n\ln n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1-2\ln 2}{n\ln n}}_{\to 0} \geqslant \frac{\ln(n!)}{n\ln n} \geqslant 1 + \underbrace{\frac{1-n}{n\ln n}}_{\to 0}$$

En passant à la limite, pour $n \to +\infty$, on obtient donc 1 de chaque côtés de l'inéquation. On conclut, par le théorème des gendarmes que,

$$\frac{\ln(n!)}{n\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{i.e.} \quad \ln(n!) \sim n\ln n \quad \text{i.e.} \quad \boxed{\ln(n!) = n\ln n + o(n\ln n).}$$

(b) Soit $n \geqslant 3$. On reprend l'inéquation de la question (a) :

$$(n+1)\ln(n+1) - n - 2\ln 2 + 1 \geqslant \ln(n!) \geqslant n\ln n - n + 1.$$

On la divise, cette fois, par $n\ln n - n$ (qui ne s'annule pas car $n \geqslant 3$), et on étudie, encore une fois, sa limite :

$$\underbrace{\frac{(n+1)\ln(n+1) - (n+1)}{n\ln n - n}}_{\to 1} + \underbrace{\frac{2-2\ln 2}{n\ln n - n}}_{\to 0} \geqslant \frac{\ln(n!)}{n\ln n - n} \geqslant \underbrace{\frac{n\ln n - n}{n\ln n - n}}_{\to 1} + \underbrace{\frac{1}{n\ln n - n}}_{\to 0}.$$

Le membre de droite ainsi que le membre de gauche convergent tous deux vers 1. On conclut, à l'aide du théorème des gendarmes, que

$$\frac{\ln(n!)}{n\ln n - n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{i.e.} \quad \boxed{\ln(n!) = n\ln n - n + o(n).}$$

(c) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ln(n!) - n\ln n + n$. On veut montrer que $u_n \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\ln n$. Soit $n \geqslant 3$. On compare u_{n+1} et u_n :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \ln\big((n+1)!\big) - (n+1)\ln(n+1) + (n+1) - \ln(n!) + n\ln n - n \\
&= \cancel{\ln(n!)} + \cancel{\ln(n+1)} - (n+\cancel{1})\ln(n+1) + 1 - \cancel{\ln(n!)} + n\ln n \\
&= -n\ln(n+1) + 1 + n\ln n \\
&= -\cancel{n\ln n} + \cancel{n\ln n} - n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + 1 \\
&= 1 - 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, en sommant ces termes, on obtient une somme télescopique :

$$\begin{aligned}
u_n - u_1 = \sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) &= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2k} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln n.
\end{aligned}$$

On en conclut que

$$\boxed{\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + o(\ln n).}$$

(d) On pose la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme $v_n = \ln(n!) - n\ln n + n - \frac{1}{2}\ln n$. On veut montrer que la série télescopique $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \ln\big((n+1)!\big) - \ln(n!) - (n+1)\ln(n+1) + n\ln n + (n+1) - n - \frac{1}{2}\ln(n+1) - \ln n \\
&= \ln\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right) - (n+1)\ln(n+1) + n\ln n + 1 - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \ln(n+1) - (n+1)\ln(n+1) + n\ln n + 1 - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= -n\ln(n+1) + n\ln n + 1 - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= -n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + 1 - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= -\left(\frac{1}{2}+n\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + 1 \\
&= -\left(\frac{1}{2}+n\right)\times\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + 1 \\
&= -\frac{1}{2n} - 1 + \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + 1 \\
&= \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

On remarque que $\sum(v_{n+1} - v_n) \sim \sum -\frac{1}{12n^2} \sim \sum\frac{1}{n^2}$ et, comme la série $\sum\frac{1}{n^2}$ converge par critère de Riemann, alors la série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge également.

Or, cette série est télescopique :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \sum_{k=1}^{n-1}(v_{n+1} - v_n) = v_n - v_1.$$

Le terme v_1 étant constant, on a démontré que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. En nommant sa limite $-K$, on a donc l'égalité suivante

$$v_n = K + o(1) \qquad \text{i.e.} \qquad \boxed{\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + K + o(1).}$$

(e) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \ln(n!) - n\ln n + n - \frac{1}{2}\ln n - K$. Soit $n \geqslant 2$. On calcule

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= v_{n+1} - v_n + K - K \\ &= -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

On en déduit, comme à la question précédente, que la série $\sum(w_{n+1} - w_n)$ converge. Or, on a

$$\begin{aligned} \forall n \geqslant 2, \quad w_n - w_1 = \sum_{k=1}^{n-1}(w_{k+1} - w_k) &= \sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{12k^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= n \times \left(-\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\ln(n!) - n\ln n + n - \frac{1}{2}\ln n - K = \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

d'où

$$\boxed{\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + K + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right).}$$

3. En prenant le résultat de la question (2e) et lui appliquant la fonction exponentielle, on obtient

$$n! = n^n \times \mathrm{e}^{-n} \times \sqrt{n} \times \mathrm{e}^K \times \mathrm{e}^{o(1)}.$$

Le terme en $\mathrm{e}^{o(1)}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. En factorisant les exposants et en passant à un équivalent, cette expression peut se réécrire sous la forme

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^K \sqrt{n}.$$

On s'intéresse maintenant à déterminer e^K. On connaît, d'après la question (1h), un équivalent de $(2n)!/(n!)^2$. On utilise l'équivalent de $n!$ trouvé précédemment et on détermine la valeur de e^K.

$$\begin{aligned} \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}} \sim \frac{(2n)!}{(n!)^2} &\sim \frac{\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}\sqrt{2n} \times \mathrm{e}^K}{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} \times n \times \mathrm{e}^K \times \mathrm{e}^K} \\ &\sim \left(\frac{2n}{n}\right)^{2n} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n} \times \mathrm{e}^K} \\ &\sim 2^{2n} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{n} \times \mathrm{e}^K} \end{aligned}$$

On multiplie par $4^{-n} \times \sqrt{n}$ de chaque côtés de l'équivalence pour obtenir

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sim \frac{\sqrt{2}}{\mathrm{e}^K} \qquad \text{i.e.} \qquad \mathrm{e}^K \sim \sqrt{2\pi}.$$

Or, comme l'équivalent de e^K ne dépend plus de n, on en déduit que $\mathrm{e}^K = \sqrt{2\pi}$. On peut donc en déduire la formule de Stirling :

$$\boxed{n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi\, n}.}$$