Chapitre 14

Couple aléatoire

Hugo Salou MPI*

Dernière mise à jour le 27 février 2023

1 Lois conjointe et marginales

PROPOSITION – DÉFINITION 1:
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, alors l'application

$$\begin{aligned}(X,Y) : \Omega &\longrightarrow X(\Omega)\times Y(\Omega)\\ \omega &\longmapsto \big(X(\omega), Y(\omega)\big)\end{aligned}$$

est aussi une variable aléatoire discrète, appelée *couple de variables aléatoires discrètes* (X,Y).

La loi de probabilité du couple (X,Y) est appelée *loi conjointe* :

$$\forall (i,j)\in I\times J,\qquad P\big((X,Y)=(a_i,b_j)\big) = P(X=a_i, Y=b_j) = P\big((X=a_i)\cap(Y=b_j)\big) = p_{i,j}$$

où chaque $p_{i,j}$ appartient à $[0,1]$. On vérifie bien $\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} p_{i,j} = 1$.

Les lois de de X et de Y sont appelées *lois marginales*. La loi conjointe permet de retrouver les lois marginales :

$$\begin{aligned}\forall i\in I,\qquad P(X=a_i) &= \sum_{j\in J} P(X=a_i, Y=b_j)\\ \forall j\in J,\qquad P(Y=b_j) &= \sum_{i\in I} P(X=a_i, Y=b_j).\end{aligned}$$

En effet, $(X=a_i) = \bigcup_{j\in J}\big[(X=a_i)\cap(Y=b_j)\big]$, et cette union est disjointe. Ainsi, $P(X=a_i) = \sum_{j\in J} P\big[(X=a_i)\cap(Y=b_j)\big] = \sum_{j\in J} p_{i,j}$. De même pour la probabilité $P(Y=b_j) = \sum_{i\in I} p_{i,j}$.

⚠ ATTENTION Les lois marginales ne permettent pas toujours de retrouver la loi conjointe : « on perd la notion de corrélation entre les deux variables aléatoires. »

EXERCICE 2:
Une boîte contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On tire au hasard, l'une après l'autre, deux boules. Soient X et Y les variables aléatoires définies par : X est égale à 0 si la première boule tirée est blanche, à 1 si elle est noire. De même pour Y avec la seconde boule.

Compléter les tableaux suivants dans les deux cas :

1. *si le tirage se fait sans remise.*

	$Y=0$	$Y=1$	total
$X=0$	$p_{00}=\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{7}$	$p_{01}=\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{2}{7}$	$P(X=0)=\frac{3}{7}$
$X=1$	$p_{10}=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{2}{7}$	$p_{11}=\frac{4}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{2}{7}$	$P(X=1)=\frac{4}{7}$
total	$P(Y=0)=\frac{3}{7}$	$P(Y=1)=\frac{4}{6}$	1

2. *si le tirage se fait avec remise.*

	$Y=0$	$Y=1$	total
$X=0$	$p_{00}=\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}=\frac{9}{49}$	$p_{01}=\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}=\frac{12}{49}$	$P(X=0)=\frac{3}{7}$
$X=1$	$p_{10}=\frac{4}{7}\times\frac{3}{7}=\frac{12}{49}$	$p_{11}=\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}=\frac{16}{49}$	$P(X=1)=\frac{4}{7}$
total	$P(Y=0)=\frac{3}{7}$	$P(Y=1)=\frac{4}{6}$	1

DÉFINITION 3:
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On dit que deux variables aléatoires X et Y sont *indépendantes*, et on note $X \perp\!\!\!\perp Y$, si

$$\forall (a,b)\in X(\Omega)\times Y(\Omega),\qquad P(X=a, Y=b) = P(X=a)\cdot P(Y=b).$$

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille (finie ou non) de variables aléatoires. On dit que ces variables aléatoires ont

— *deux à deux indépendantes* si

$$\forall i \neq j \in I, \forall (a,b), \qquad P(X_i = a_i, X_j = b) = P(X_i = a) \cdot P(X_j = b),$$

— *indépendantes* si, pour toute partie finie non vide $J \subset I$,

$$\forall (a_j)_{j\in J}, \qquad P\Big(\bigcap_{j\in J}(X_j = a_j)\Big) = \prod_{j\in J} P(X_j = a_j).$$

Les propriétés ci-dessous sont admises.

Proposition 4:
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes d'un espace probabilisé $(\mathscr{W}, \mathscr{A}, P)$,

1. $\forall A \subset X(\Omega), \forall B \in Y(\Omega), \qquad P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(X \in B),$
2. pour toutes fonctions φ et ψ, les *vad* $\varphi(X)$ et $\psi(Y)$ sont indépendantes.

Lemme des coalitions : Soit φ et ψ deux fonctions. Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes, alors

$$\forall p \in [\![1, n-1]\!], \qquad \varphi(X_1, \dots, X_p) \perp\!\!\!\perp \psi(X_{p+1}, \dots, X_n).$$

2 La somme de deux variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. La *somme* Z de deux *vard* X et Y définie par

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega).$$

La loi conjointe du couple (X, Y) permet de calculer la loi de probabilité de la forme

$$\forall c \in Z(\Omega), \qquad P(Z = c) = \sum_{\substack{i\in I\\ j\in J\\ a_i + b_j = c}} p_{i,j}.$$

Exercice 5:
*Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires **indépendantes**. Montrer que*

1. *si $X_1 \sim \mathscr{B}(n_1, p)$ et $X_2 \sim \mathscr{B}(n_2, p)$, alors*

$$X_1 + X_2 \sim \mathscr{B}(n_1 + n_2, p)$$

où $n_1 \in \mathbb{N}^*$, $n_2 \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \,]0,1[$ a la même valeur pour les deux viables aléatoires. En déduire $\mathrm{E}(X_1 + X_2)$ et $\mathrm{V}(X_1 + X_2)$. ***(stabilité de la loi binomiale)***

2. *si $X_1 \sim \mathscr{P}(\lambda_1)$ et $X_2 \sim \mathscr{P}(\lambda_2)$, alors*

$$X_1 + X_2 \sim \mathscr{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

où $\lambda_1 \in \mathbb{R}_*^+$, et $\lambda_2 \in \mathbb{R}_*^+$. En déduire $\mathrm{E}(X_1 + X_2)$ et $\mathrm{V}(X_1 + X_2)$. ***(stabilité de la loi de Poisson)***

1. On a

$$\begin{aligned}\forall s \in [\![0, n_1 + n_2]\!], \qquad (X_1 + X_2 = s) &= \bigcup_{k_1+k_2=s} (X_1 = k_1, X_2 = k_2)\\ &= \bigcup_{k_1+k_2=s} \big[(X_1 = k_1) \cap (X_2 = k_2)\big]\end{aligned}$$

et cette union est disjointe. D'où,

$$\begin{aligned}
P(X_1+X_2=s) &= \sum_{k_1+k_2=s} P\big((X_1=k_1)\cap(X_2=k_2)\big) \\
&= \sum_{k_1+k_2=s} P(X_1=k_1)\cdot P(X_2=k_2) && \text{car } X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \\
&= \sum_{k_1+k_2=s} \binom{n_1}{k_1} p^{k_1} q^{n_1-k_1} \times \binom{n_2}{k_2} p^{k_2} q^{n_2-k_2} \\
&= \sum_{k_1+k_2=s} p^{k_1+k_2}\cdot q^{n_1+n_2-k_1-k_2}\binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2} \\
&= p^s\cdot q^{n_1+n_2-s}\sum_{k_1+k_2=s}\binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2} \\
&= p^s\cdot q^{n_1+n_2-s}\binom{n_1+n_2}{s} && \text{d'après la formule de Vandermonde}
\end{aligned}$$

D'où, $X_1+X_2 \sim \mathscr{B}(n_1+n_2, p)$. On en déduit que

$$\mathrm{E}(X_1+X_2) = (n_1+n_2)p \qquad \mathrm{V}(X_1+X_2) = (n_1+n_2)pq.$$

2. On a $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \mathbb{N}$, et $\forall k \in X_1(\Omega)$, $P(X_1=k_1) = \mathrm{e}^{-\lambda_1}\cdot\lambda_1^{k_1}/k_1!$, de même pour X_2. Ainsi, $(X_1+X_2)(\Omega) = \mathbb{N}$. On a

$$(X_1+X_2=s) = \bigcup_{k_1+k_2=s}\big[(X_1=k_1)\cap(X_2=k_2)\big]$$

et cette union est disjointe, d'où

$$\begin{aligned}
P(X_1+X_2=s) &= \sum_{k_1+k_2=s} P\big[(X_1=k_1)\cap(X_2=k_2)\big] \\
&= \sum_{k_1+k_2=s} P(X=k_1)\cdot P(X_2=k_2) && \text{car } X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \\
&= \sum_{k_1+k_2=s} \mathrm{e}^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_1^{k_1}}{k_1!}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda_2}\cdot\frac{\lambda_2^{k_2}}{k_2!} \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{k_1+k_2=s}\frac{\lambda_1^{k_1}\cdot\lambda_2^{k_2}}{k_1!\cdot k_1!} \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{k=0}^{s}\frac{\lambda_1^{k}\cdot\lambda_2^{s-k}}{k!\cdot(s-k)!} \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot\frac{1}{s!}\sum_{k=0}^{s}\binom{s_1}{k}\lambda_1^k\lambda_2^{s-k} \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot\frac{1}{s!}(\lambda_1+\lambda_2)^s.
\end{aligned}$$

Ainsi, $X_1+X_2 \sim \mathscr{P}(\lambda_1+\lambda_2)$. On en déduit que

$$\mathrm{E}(X_1+X_2) = \lambda_1+\lambda_2 \qquad \mathrm{V}(X_1+X_2) = \lambda_1+\lambda_2.$$

3 Espérance et variance d'une somme

Proposition 6:
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. Si deux variables aléatoires X et Y sont d'espérance finie, alors leur somme $X+Y$ est aussi d'espérance finie et

$$\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(X+Y).$$

Mieux, pour tout couple de réels $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, la variable aléatoire $\alpha X+\beta Y$ est d'espérance finie et

$$\mathrm{E}(\alpha X+\beta Y)=\alpha \mathrm{E}(X)+\beta \mathrm{E}(Y).$$

Proposition – Définition 7:
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes d'un espace probabilisé. Si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors

$$\mathrm{V}(X+Y)=\mathrm{V}(X)+\mathrm{V}(Y)+2\operatorname{Cov}(X, Y)$$

où $\operatorname{Cov}(X, Y)$ est appelée la *covariance* de (X, Y) et est définie par

$$\operatorname{Cov}(X, Y)=\mathrm{E}\Big[\big(X-\mathrm{E}(X)\big) \cdot \big(Y-\mathrm{E}(Y)\big)\Big]=\mathrm{E}(X \cdot Y)-\mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y).$$

Démonstration:
On a $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}\big((X-\mathrm{E}(X))^2\big)=\mathrm{E}(X^2)-\big[\mathrm{E}(X)\big]^2$. De même, $\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}\big((Y-\mathrm{E}(Y))^2\big)=\mathrm{E}(Y^2)-\big[\mathrm{E}(Y)\big]^2$, et $\mathrm{V}(X+Y)=\mathrm{E}\big((X+Y-\mathrm{E}(X+Y))^2\big)=\mathrm{E}\big((X+Y)^2\big)-\big[\mathrm{E}(X+Y)\big]^2$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(X+Y) &= \mathrm{E}(X^2+Y^2-2XY)-\big(\mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y)\big)^2 \\
&= \mathrm{E}(X^2)+\mathrm{E}(Y^2)+2\mathrm{E}(XY)-[\mathrm{E}(X)]^2-[\mathrm{E}(Y)]^2-2\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) \\
&= \mathrm{V}(X)+\mathrm{V}(Y)+2\big[\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)\big]
\end{aligned}$$

Remarque 8:
1. $\operatorname{Cov}(X, X)=\mathrm{E}(X^2)-[\mathrm{E}(X)]^2=\mathrm{V}(X)$.
2. La covariance est une forme bilinéaire symétrique ~~définie~~ positive. En effet, la symétrie est assurée par commutativité du produit ; la bilinéarité est assurée par la linéarité de l'espérance ; la positivité est assurée par le fait que $\big(X-\mathrm{E}(X)\big)^2$ est une *vard* à valeurs positive.

Proposition 9 (inégalité de Cauchy-Schwarz):
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé, et (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes. Si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors

$$\big(\mathrm{E}(XY)\big)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2) \cdot \mathrm{E}(Y^2) \qquad \text{et} \qquad \big[\operatorname{Cov}(X, Y)\big]^2 \leqslant \mathrm{V}(X) \cdot \mathrm{V}(Y).$$

Démonstration:
Pour la seconde formule, on utilise l'inégalité de Cauchy-Scharz pour les produits scalaires (le caractère défini n'a pas été utilisé dans la démonstration) : $|\operatorname{Cov}(X, Y)| \leqslant \sqrt{\mathrm{V}(X)} \cdot \sqrt{\mathrm{V}(y)}$ et donc $\big[\operatorname{Cov}(X, Y)\big]^2 \leqslant \mathrm{V}(X) \times \mathrm{V}(Y)$. De même pour l'autre inégalité.

Définition 10:
Soit un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles discrètes, tel que X^2 et Y^2 sint d'espérances finies. On dit que X et Y ne sont pas *corrélées* si $\operatorname{Cov}(X, Y)=0$.

Théorème 11:
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires tel que X^2 et Y^2 sont d'espérance finie. On a

$$\begin{aligned}
X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \implies \mathrm{E}(XY)=\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) &\iff \operatorname{Cov}(X, Y)=0 \\
&\iff \mathrm{V}(X+Y)=\mathrm{V}(X)+\mathrm{V}(Y)
\end{aligned}$$

On a donc
$$X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \quad \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \quad X \text{ et } Y \text{ non corrélées.}$$

Exercice 12:
Soit X une variable aléatoire qui prend, de manière équiprobable, les valeurs 3 valeurs -1, 0 et 1. Soit $Y = |X|$.

1. *Calculer* $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{E}(XY)$, $\mathrm{V}(X)$, $\mathrm{V}(Y)$, *et* $\mathrm{V}(X+Y)$.
2. *Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?*

1. Par équiprobabilité, $P(X=1) = P(X=0) = P(X=-1) = 1/3$. Ainsi,
$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k\in[\![-1,1]\!]} kP(X=k) = -1\times\frac{1}{3} + 0\times\frac{1}{3} + 1\times\frac{1}{3} = 0.$$
Et,
$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{k\in[\![-1,1]\!]} |k|\, P(X=k) = \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$
d'après le théorème de transfert. Or,
$$\begin{aligned}\mathrm{E}(XY) &= P(XY=1) - P(XY=-1)\\ &= P(X=1)\cdot P_{(X=1)}(Y=1) - P(X=-1)\cdot P_{(X=-1)}(Y=1)\\ &= \frac{1}{3}\times 1 - \frac{1}{3}\times 1\\ &= 0.\end{aligned}$$
Également,
$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - \big[\mathrm{E}(X)\big]^2\\ &= \mathrm{E}(X^2) - 0^2\\ &= (-1)^2\, P(X=-1) + 0^2\, P(X=0) + 1^2\, P(X=1)\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$
De plus,
$$\mathrm{V}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \big[\mathrm{E}(Y)\big]^2 = \mathrm{E}(X^2) - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}.$$
On calcule
$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X+Y) &= \mathrm{V}(X) + \mathrm{V}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)\\ &= \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + 2\big(\mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\cdot\mathrm{E}(Y)\big)\\ &= \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + 2\underbrace{\left(0 - 0\times\frac{2}{3}\right)}_{\mathrm{Cov}(X,Y)=0}\end{aligned}$$

2. On a $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas corrélées (*i.e.* sont *décarrelées*). Mais, elles ne sont pas indépendantes :
$$\frac{1}{3} = P(X=-1, Y=1) \neq P(X=-1)\times P(Y=1) = \frac{2}{9}.$$

Corollaire 13:
Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires réelles discrètes indépendantes deux à deux, alors la variance de la somme est égale à la somme des variances :

$$\mathrm{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathrm{V}(X_1) + \cdots + \mathrm{V}(X_n).$$

Démonstration:

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X_1 + \cdots + X_n) &= \mathrm{Cov}(X_1 + \cdots + X_n, X_1 + \cdots + X_n)\\ &= \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^n X_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathrm{Cov}(X_i, X_j) && \text{par bilinéarité}\end{aligned}$$

Or, pour tout $i \neq j$, $X_i \perp\!\!\!\perp X_j$, d'où $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$. Ainsi,

$$\mathrm{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Cov}(X_i, X_i) = \sum_{i=1}^n \mathrm{V}(X_i).$$

Rappel:
La *série génératrice* de la variable aléatoire X est G_X définie comme

$$\forall t \in \left]-R, R\right[, \quad \mathrm{G}_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = n) \cdot t^n.$$

De plus, on a $P(X = k) = {\mathrm{G}_X}^{(k)}(0) / k!$.

Proposition 14:
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soient G_X, G_Y et G_{X+Y} les fonctions génératrices des variables aléatoires X, Y et $X + Y$. Si X et Y sont indépendantes, alors

$$\forall t \in [-1, 1], \qquad \mathrm{G}_{X+Y}(t) = \mathrm{G}_X(t) \cdot \mathrm{G}_Y(t).$$

▷ Chapitre 11, entre la définition 30 et la proposition 31.

Démonstration:
L'événement $(X + Y = n)$ est égal à $\bigcup_{k=0}^n \left[(X = k) \cap (Y = n - k)\right]$, et cette union est disjointe. D'où, $P(X + Y = n) = \sum_{k=0}^n P\left[(X = k) \cap (Y = n - k)\right]$. Or, $X \perp\!\!\!\perp Y$, d'où $P\left[(X = k) \cap (Y = n - k)\right] = P(X = k) \cdot P(Y = n - k)$. Ainsi,

$$P(X + Y = n) = \sum_{k=0}^n \underset{\substack{\uparrow \\ P(X=k)}}{a_k} \times \overset{\substack{P(Y=n-k) \\ \downarrow}}{b_{n-k}}.$$

Or, les séries convergent absolument, d'où, par produit de Cauchy, $\mathrm{G}_{X+Y}(t) = \mathrm{G}_X(t) \cdot \mathrm{G}_Y(t)$, pour tout $t \in \left]-1, 1\right[$. En $t = -1$, et en $t = 1$, les séries convergent absolument également. Ainsi,

$$\forall t \in [-1, 1], \qquad \mathrm{G}_{X+Y}(t) = \mathrm{G}_X(t) \cdot \mathrm{G}_Y(t).$$

Tarte à la crème
▷ Chapitre 11, exercice 32

Exercice 15:
Refaire l'exercice 5, mais utiliser la proposition précédente.

1. On rappelle que $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$, $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$ et $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$. Ainsi, pour tout $t \in [-1, 1]$, $\mathrm{G}_{X_1+X_2}(t) = \mathrm{G}_{X_1}(t) \cdot \mathrm{G}_{X_2}(t)$. Et, $\forall t$, $\mathrm{G}_{X_1}(t) = (pt + q)^{n_1}$ et $\mathrm{G}_{X_2}(t) = (pt + q)^{n_2}$. D'où,

$$\forall t \in [-1, 1], \quad \mathrm{G}_{X_1+X_2}(t) = (pt + q)^{n_1} \cdot (pt + q)^{n_2} = (pt + q)^{n_1+n_2}.$$

   Par égalité des séries génératrices [1], on en déduit que $X + Y \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.
2. De même, comme $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$, $\forall t$, $\mathrm{G}_{X_1}(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_1} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}$; et comme $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$, $\forall t$, $\mathrm{G}_{X_2}(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_2} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}$. De plus, $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$, d'où $\forall t \in [-1, 1]$, $\mathrm{G}_{X_1+X_2}(t) = \mathrm{G}_{X_1}(t) \times \mathrm{G}_{X_2}(t) = \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$. D'où, $X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

1. En effet, la série génératrice permet de déterminer les probabilités, d'où la loi d'une variable aléatoire.

4 La loi faible des grands nombres

THÉORÈME 16 (Loi faible des grands nombres):
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. Soient $(X_k)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes. Et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$. Si les variables aléatoires sont deux à deux indépendantes, et si elles sont de même espérance μ, et de même variance σ^2, alors

$$\forall a > 0, \qquad P(|Z_n - \mu| \geqslant a) \leqslant \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{\sigma}{a}\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

« S'éloigner de la moyenne théorique est de plus en plus rare en itérant les mesures. »

DÉMONSTRATION:
On applique l'inégalité de BIENAIMÉ-THEBYCHEV à la variable aléatoire Z_n :

$$\forall a > 0, \qquad P\big(|Z_n - \mathrm{E}(Z_n)| \geqslant a\big) \leqslant \frac{\mathrm{V}(Z_n)}{a^2}.$$

Or, $\mathrm{E}(Z_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu$ par linéarité de l'espérance. De plus,

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(Z_n) &= \mathrm{V}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\mathrm{V}(X_1 + \cdots + X_n) \\ &= \frac{1}{n^2}\big(\mathrm{V}(X_1) + \cdots + \mathrm{V}(X_n)\big) && \text{par indépendance deux à deux des } X_i \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

D'où,$\forall a > 0$, $P\big(|Z_n - \mu| \geqslant a\big) \leqslant \sigma^2/(n \cdot a^2)$.

EXEMPLE 17 (Règle d'or de BERNOULLI):
On répète indépendamment une épreuve de BERNOULLI, c'est à dire une expérience aléatoire qui peut donner deux résultats : un succès avec la probabilité p, ou un échec avec la probabilité $q = 1 - p$. Soit Z_n la *fréquence*[2] des succès après n épreuves.

On pose X_k la variable aléatoire valant 1 en cas de succès de la k-ième épreuve de Bernoulli, 0 sinon. D'une part, $\mu = \mathrm{E}(X_i) = 0 \times P(X_i = 0) + 1 \times P(X_i = 1) = p$. D'autre part, $\sigma^2 = \mathrm{V}(X_i) = p \cdot q$ car $X_i \sim \mathscr{B}(1, p)$. On applique la loi faible des grands nombres :

$$\forall a > 0, \qquad P(|Z_n - p| \geqslant a) \leqslant \frac{pq}{na^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Donc la probabilité que « la fréquence Z_n des succès s'écarte de la probabilité p » tend vers 0 quand le nombre n d'épreuves de BERNOULLI tend vers $+\infty$.

2. *i.e.* le nombre moyens de succès : $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.