Chapitre 13

E normé

Hugo Salou MPI*

Dernière mise à jour le 2 mars 2023

1 Normes et distances

DÉFINITION 1:
Soit E un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Une application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est appelée une *norme* si, pour tous vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de E, et pour tout scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$,[1]

1. $N(\vec{x}) = 0 \implies \vec{x} = \vec{0}$, (axiome de séparation)
2. $N(\alpha\,\vec{x}) = |\alpha|\,N(\vec{x})$, (homogénéité, au sens physicien)
3. $N(\vec{x}+\vec{y}) \leqslant N(\vec{x}) + N(\vec{y})$. (inégalité triangulaire)

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé un *espace vectoriel normé* (*evn*).

Une norme peut-être définie sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, même si un produit scalaire ne peut être défini que sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On note en général l'application N comme $\|\cdot\|$.

EXERCICE 2:

1. *La valeur absolue est une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$: y en a-t-il d'autres ? Le module est une norme sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$: y en a-t-il d'autres ?*
2. *Par définition, toute norme N vérifie la propriété 3., appelée inégalité triangulaire. En déduire que*

$$\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, \qquad |N(\vec{x}) - N(\vec{y})| \leqslant N(\vec{x}-\vec{y}).$$

1. Ici, $n = 1$, l'espace vectoriel normé est $\mathbb{K}^1 = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On vérifie bien les hypothèses pour que la valeur absolue (resp. module) :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{K}, &\qquad |x| = 0 \implies x = 0 \\ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall x \in \mathbb{K}, &\qquad |\alpha x| = |\alpha|\,|x| \\ \forall (x,y) \in \mathbb{K}^2, &\qquad |x+y| \leqslant |x| + |y| \end{aligned}$$

   Ce n'est pas la seule norme, on peut multiplier par un nombre k strictement positif, et la norme $x \mapsto k|x|$ obtenue est toujours une norme. Il n'y en a pas d'autres ; montrons le. Soit N une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z = z \times 1$, d'où $N(z) = |z| \cdot N(1)$, et $N(1) > 0$.
2. (Tarte à la crème) Soit N une norme sur un espace vectoriel $\mathbb{K}$. Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de E.

$$\begin{aligned} &\left|N(\vec{x}) - N(\vec{y})\right| \leqslant N(\vec{x}-\vec{y}) \\ \iff\ & -N(\vec{x}-\vec{y}) \leqslant N(\vec{x}) - N(\vec{y}) \leqslant N(\vec{x}-\vec{y}) \\ \iff\ & \begin{cases} N(\vec{x}) \leqslant N(\vec{y}) + N(\vec{x}-\vec{y}) & (1) \\ N(\vec{y}) \leqslant N(\vec{x}) + N(\vec{x}-\vec{y}) & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

   La propriété (1) est vraie car $\vec{x} = \vec{y} + (\vec{x}-\vec{y})$, et application de l'inégalité triangulaire. De même pour (2) en échangeant $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

Sur le même espace vectoriel, on peut définir plusieurs normes.

EXEMPLE 3:

1. Sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$), avec $n \in \mathbb{N}^*$, on définit trois normes classiques : soit $\vec{x} = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\|\vec{x}\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n| \qquad \|\vec{x}\|_2 = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \qquad \|\vec{x}\|_\infty = \max\left(|x_1|,\dots,|x_n|\right).$$

2. Sur l'espace vectoriel $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$ des fonctions f continues sur un segment $[a,b]$ vers $\mathbb{K}$,

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \qquad \|f\|_2 = \int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \qquad \|f\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|.$$

On définit la norme p-ième comme

$$\|\vec{x}\|_p = \sqrt[p]{\textstyle\sum_{i=1}^n |x_i|^p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \|\vec{x}\|_\infty.$$

1. $\mathbb{K}$ correspond à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, le corps associé à l'espace vectoriel.

On a déjà montré que $\|\cdot\|_2$ est une norme au chapitre produit scalaire : par le caractère défini du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, par la bilinéarité de ce produit scalaire, et par inégalité de Cauchy-Schwarz, on vérifie chacune des hypothèses de la norme. Pour les autres normes, on vérifie aisément les hypothèses, ce sont donc bien des normes.

> Définition 4:
> La *distance* associée à une norme N est l'application
>
> $$\begin{aligned} d : E^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\longmapsto N(\vec{y} - \vec{x}). \end{aligned}$$
>
> (C'est une distance entre deux vecteurs.)

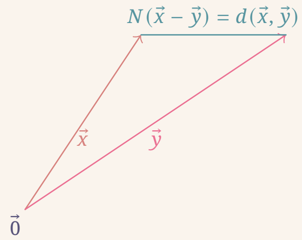

Figure 1 – Distance entre deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$

De la définition de *norme*, il en résulte les deux propriétés

1. $\forall(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \quad d(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{y}$;
2. $\forall(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \in E^3, \quad d(\vec{x}, \vec{z}) \leqslant d(\vec{x}, \vec{y}) + d(\vec{y}, \vec{z})$.

La distance entre deux fonctions est

— pour la norme infinie, il s'agit de la longueur de la flèche, c'est la différence maximale entre les deux fonctions ;

— pour la norme 1, il s'agit de l'aire entre les deux courbes.

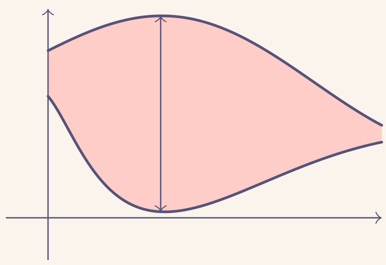

Figure 2 – Distance entre deux fonctions

Remarque 5:
Si une norme provient d'un produit scalaire, alors on dit que cette norme est *euclidienne*. Ce produit scalaire est alors unique (car on peut le calculer grâce aux égalités de polarisations) et cette norme vérifie l'égalité du parallélogramme.

Mais, certaines normes ne proviennent pas d'un produit scalaire, par exemple la norme infinie : $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$ sur l'espace $\mathbb{R}^2$. En effet, avec $\vec{u} = (2, 1)$ et $(1, 2)$, alors $\|\vec{u} + \vec{v}\|_\infty = 3$, $\|\vec{u} - \vec{v}\| = 1$, $\|\vec{u}\|_\infty = 2$ et $\|\vec{v}\|_\infty = 2$; mais,

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|_\infty^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|_\infty^2 \neq 2\|\vec{u}\|_\infty^2 + 2\|\vec{v}\|_\infty^2.$$

L'égalité du parallélogramme n'est pas vérifiée.

2 Boules

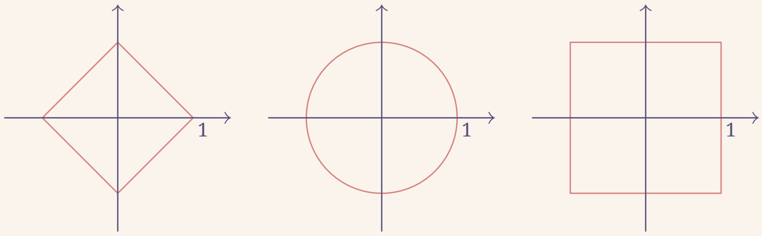

Figure 3 – Sphère de centre $\vec{0}$ et de rayon 1 pour les normes 1, 2 et ∞ de $\mathbb{R}^2$

Définition 6:
Soit E un espace vectoriel normé par N. Soient $\vec{a}$ un vecteur de E, et $r > 0$. On appelle

1. *sphère* de centre $\vec{a}$ et de raton r la partie de E définie par
$$\{\vec{x} \in E \mid N(\vec{x} - \vec{a}) = r\} ;$$
2. *boule fermée* de centre $\vec{a}$ et de rayon r la partie de E définie par
$$\{\vec{x} \in E \mid N(\vec{x} - \vec{a}) \leqslant r\} ;$$
3. *boule ouverte* de centre $\vec{a}$ et de rayon r la partie de E définie par
$$\{\vec{x} \in E \mid N(\vec{x} - \vec{a}) < r\}.$$

On note $B(\vec{a}, r)$ la boule ouverte de centre $\vec{a}$ et de rayon r, la boule fermée est notée $\bar{B}(\vec{a}, r)$. La sphère est $\bar{B}(\vec{a}, r) \setminus B(\vec{a}, r)$.

Exercice 7:
Montrer que, pour tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^2$,
$$\|\vec{x}\|_\infty \leqslant \|\vec{x}\|_2 \leqslant \|\vec{x}\|_1 \leqslant \sqrt{n} \cdot \|\vec{x}\|_2 \leqslant n \cdot \|\vec{x}\|_\infty.$$

Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

— On a $\|\vec{x}\|_\infty \leqslant \|\vec{x}\|_2$ car, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \geqslant \sqrt{x_i^2} = |x_i|$, d'où $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \geqslant \max_{i \in [\![1,n]\!]}(|x_i|)$.

— On a $\|\vec{x}\|_2 \leqslant \|\vec{x}\|_1$ car $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \leqslant |x_1| + \cdots + |x_n|$, car $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 +$ tous les doubles produits, qui sont positifs.

— On a $\|\vec{x}\|_1 \geqslant \sqrt{n} \cdot \|\vec{x}\|_2$, car
$$\begin{aligned} |x_1| + \cdots + |x_n| &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix} \right\rangle \\ &\leqslant \sqrt{1^2 + 1^2 + \cdot + 1^2} \cdot \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} \\ &= \sqrt{n} \cdot \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} \end{aligned}$$
par inégalité de Cauchy-Schwarz.

— On a $\|\vec{x}\|_2 \leqslant \sqrt{n} \cdot \|\vec{x}\|_\infty$ car $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \leqslant \sqrt{n} \cdot \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$.

DÉFINITION 8:
Soit E un espace vectoriel normé.

1. Une partie $A \subset E$ est *bornée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout vecteur $\vec{x} \in A$,
$$\|\vec{x}\| \leqslant M\ ;$$
2. une suite $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & E \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}$ de vecteurs est *bornée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\|u_n\| \leqslant M\ ;$$
3. une fonction $f : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est *bornée* s'il existe M, tel que, pour tout $t \in D$,
$$\|f(t)\| \leqslant M.$$

Autrement dit, il existe M tel que

1. $A \subset \bar{B}(\vec{0}, M)$, 2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \bar{B}(\vec{0}, M)$, 3. $f(D) \subset \bar{B}(\vec{0}, M)$.

3 Limite d'une suite

Dans $\mathbb{R}$, pour dire qu'un nombre x tend vers un nombre a, on utilise la valeur absolue :
$$x \to a \iff x - a \to 0 \iff |x - a| \to 0.$$
De même, dans un espace vectoriel E, pour dire qu'un vecteur $\vec{x}$ tend vers un vecteur $\vec{a}$, on utilisera une norme :
$$\vec{x} \to \vec{a} \iff \vec{x} - \vec{a} \iff \|\vec{x} - \vec{a}\| \to 0 \iff \mathrm{d}(\vec{x}, \vec{a}) \to 0.$$

DÉFINITION 9:
Soit E un espace vectoriel normé par $\|\cdot\|$. Soit $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Soit un vecteur $\vec{\ell} \in E$. On dit que $\vec{u}_n$ *tend vers* $\vec{\ell}$ si $\|\vec{u}_n - \vec{\ell}\|$ tend vers $0_{\mathbb{R}}$. Autrement dit, si
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\quad \|\vec{u}_n - \vec{\ell}\| \leqslant \varepsilon.$$

PROPOSITION 10:
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.

1. (unicité de la limite) Il n'existe pas toujours de limite $\vec{\ell}$, mais, quand elle existe, elle est unique. On peut donc parler de *la* limite de $\vec{u}_n$, et écrire $\vec{\ell} = \lim_{n\to\infty} \vec{u}_n$.
2. (convergence $\implies$ bornée) Si la suite de vecteurs $(\vec{u}_n)$ converge, alors elle est bornée. La réciproque est fausse.

DÉMONSTRATION: 1. On suppose que $\vec{u}_n \to \vec{\ell}_1$, et $\vec{u}_n \to \vec{\ell}_2$ avec $\vec{\ell}_1 \neq \vec{\ell}_2$. Ainsi,
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\quad \|\vec{u}_n - \vec{\ell}_1\| \leqslant \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\quad \|\vec{u}_n - \vec{\ell}_2\| \leqslant \varepsilon$$

On pose $\varepsilon = \frac{1}{3}\|\vec{\ell}_1 - \vec{\ell}_2\|$. D'où, pour tout $n \geqslant N$, $\|\vec{u}_n - \vec{\ell}_1\| \leqslant \varepsilon$ et $\|\vec{u}_n - \vec{\ell}_2\| \leqslant \varepsilon$, et donc $\|\vec{u}_n - \vec{\ell}_1\| + \|\vec{u}_n - \ell_2\| \leqslant 2\varepsilon = \frac{2}{3}\|\vec{\ell}_1 - \vec{\ell}_2\|$. Or, d'après l'inégalité triangulaire,
$$\|\vec{\ell}_1 - \vec{\ell}_2\| \leqslant \|\vec{u}_n - \vec{\ell}_1\| + \|\vec{u}_n - \vec{\ell}_2\| \leqslant \frac{2}{3}\|\vec{\ell}_1 - \vec{\ell}_2\|.$$
C'est absurde car $\|\vec{\ell}_1 - \vec{\ell}_2\| > 0$.

2. On suppose qu'il existe $\vec{\ell} \in E$ tel que $\vec{u}_n \to \vec{\ell}$, d'où,
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\quad \|\vec{u}_n - \vec{\ell}\| \leqslant \varepsilon.$$

On choisit $\varepsilon = 7$. Comme $\vec{u}_n = \vec{u}_n - \vec{\ell} + \vec{\ell}$, d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\forall n \geqslant N, \quad \|\vec{u}_n\| \leqslant \|\vec{u}_n - \vec{\ell}\| + \|\vec{\ell}\| \leqslant 7 + \|\vec{\ell}\|.$$

Soit $m = \max_{n \in [\![0,N]\!]} \|\vec{u}_n\|$. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|\vec{u}_n\| \leqslant m + 7 + \|\vec{\ell}\|.$$

EXERCICE 11:
La suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ représentée dans la figure 3 du poly est-elle bornée ? convergente ? (Utiliser la norme ∞ puis la norme 1 pour répondre.)

Avec la norme ∞, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_\infty = \max_{t \in [0,1]} |f(t)| = 2n + 2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$$

D'où, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Et, cette suite n'est pas convergente car elle n'est pas bornée.

Avec la norme 1, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+2} \times 2n + 2 = 1$$

car il s'agit de l'aire d'un triangle. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bornée. Pour cette norme, la suite (f_n) est-elle convergente ? Autrement dit : existe-t-il une fonction $\ell \in \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \ell$? *i.e.* telle que $\|f_n - \ell\|_1 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Non, la suite de fonctions (f_n) ne converge pas pour la norme 1. En effet, montrons le par l'absurde.

— Ou bien $\ell = 0$, alors $\|f_n - \ell\|_1 = \|f_n - 0\|_1 = \|f_n\|_1 = 1 \underset{n \to \infty}{\not\longrightarrow} 0$.

— Ou bien $\ell \neq 0$, alors il existe $x \in [0,1]$, $f(x) \neq 0$. Il existe donc $x \in]0,1[$ tel que $f(x) \neq 0$. Soit alors $y = f(x)$. Il existe donc h tel que, pour tout $t \in [x-h, x+h]$, $\ell(t) \geqslant y/2$. Alors,

$$\|f_n - \ell\| \geqslant \frac{y}{2} \times 2h,$$

à partir d'un certain rang. D'où, $\|f_n - \ell\| \underset{n \to \infty}{\not\longrightarrow} 0$.

REMARQUE 12 (La norme infinie est la norme de la convergence uniforme):
Si I est une partie de $\mathbb{R}$, alors l'ensemble E des fonctions bornées de I vers $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel, qu'on peut munir d'une norme

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in I} |f(t)|.$$

Dans cet espace vectoriel normé E,

$$\begin{aligned} f_n \xrightarrow[n \to \infty]{} f &\iff \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[t \to \infty]{} 0 \\ &\iff \sup_{t \in I} |f_n(t) - f(t)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \\ &\iff \text{la suite de fonctions } (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } I. \end{aligned}$$

DÉFINITION 13:
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E. On dit qu'une suite (v_n) est *extraite* de (u_n) s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = u_{\varphi(n)}.$$

La stricte croissance de φ implique que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \varphi(n) \geqslant n.$$

PROPOSITION 14:
Si une suite converge, alors toute suite extraite converge vers la même limite.

DÉMONSTRATION:
On suppose $\vec{u} \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{\ell}$. D'où, $\|\vec{u}_n - \vec{\ell}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, et donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N, \quad \|\vec{u}_n - \vec{\ell}\| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $(\vec{v}_n) = (\vec{u}_{\varphi(n)})$ une suite extraite. On veut montrer que $\vec{v}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{\ell}$. Or, $\varphi(n) \geqslant n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où $\varphi(n) \geqslant N$ pour $n \geqslant N$. D'où, $\|\vec{u}_{\varphi(n)} - \vec{\ell}\| \leqslant \varepsilon$ et donc $\|\vec{v}_n - \vec{\ell}\| \leqslant \varepsilon$.

4 Comparer des normes

DÉFINITION 15:
Soient N et $\|\cdot\|$ deux normes sur un espace vectoriel E. On dit que ces deux normes sont *équivalentes* s'il existe deux réels α et β tels que

$$\forall \vec{x} \in E, \qquad N(\vec{x}) \leqslant \alpha \cdot \|\vec{x}\| \quad \text{et} \quad \|\vec{x}\| \leqslant \beta \cdot N(\vec{x}).$$

REMARQUE 16:
1. Cette relation entre deux normes est une relation d'équivalence. En effet, elle est réflexive, symétrique et transitive.
2. Si deux normes sont équivalentes, alors ce qui converge pour l'une, converge aussi pour l'autre :
$$N(\vec{x} - \vec{a}) \to 0 \qquad \iff \qquad \|\vec{x} - \vec{a}\| \to 0.$$
En effet, si $N(\vec{x} - \vec{a})$ tend vers 0, alors $\|\vec{x} - \vec{a}\|$ aussi : $\|\vec{x} - \vec{a}\| \leqslant \beta \cdot N(\vec{x} - \vec{a})$.
3. De même, être ou ne pas être borné est indépendant du choix de la norme, si les normes sont équivalentes.
4. Les trois normes classiques sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes. En effet, on a
$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \qquad \|\vec{x}\|_\infty \leqslant \|\vec{x}\|_1 \leqslant n \cdot \|\vec{x}\|_\infty \quad \text{et} \quad \|\vec{x}\|_\infty \leqslant \|\vec{x}\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|\vec{x}\|_\infty,$$
d'après l'exercice 7. Mais, ceci est faux dans l'espace $\mathscr{C}([0,1])$, d'après l'exercice 11.

Pour des normes équivalentes,
- la nature d'une suite ne dépend pas de la norme,
- la limite d'une suite ne dépend pas de la norme,
- le caractère borné d'une suite ne dépend pas de la norme.

THÉORÈME 17:
Sur un espace vectoriel de dimension **finie**, toutes les normes sont équivalentes.

DÉMONSTRATION:
Voir l'annexe B.

EXERCICE 18:

1. *Soit E l'espace vectoriel de fonctions de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ continues : $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$. Déterminer un réel α tel que*
$$\forall f \in E, \qquad \|f\|_1 \leqslant \alpha \|f\|_\infty.$$
2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les fonctions f_n et g_n définies sur $[0,1]$ et représentées sur le poly. Étudier $\|f_n\|_1$ et $\|f_n\|_\infty$ ainsi que $\|g_n\|_1$ et $\|g_n\|_\infty$. Conclure.*

1. On sait que $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$. Et, $\forall t \in [0,1]$, $|f(t)| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| = \|f\|_\infty$. D'où,
$$\begin{aligned}\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_0^1 \|f\|_\infty\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant (1-0) \times \|f\|_\infty\end{aligned}$$

2. On a $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2n+2}$. De même, on a $\|g_n\|_\infty = 2n+2$, et $\|g_n\|_1 = 1$. On a déjà montré que $\|\cdot\|_1 \leqslant 1 \times \|\cdot\|_\infty$. On veut savoir s'il existe un réel β, tel que $\|\cdot\|_\infty \leqslant \beta \times \|\cdot\|_1$. Par l'absurde, supposons qu'il existe un réel β tel que $\|\cdot\|_\infty \leqslant \beta \times \|\cdot\|_1$. En particulier, $\|f_n\|_\infty \leqslant \beta \cdot \|f_n\|_1$, d'où $1 \leqslant \beta \times \frac{1}{2n+2}$. Les inégalités larges passent à la limite, d'où $1 \leqslant 0$, ce qui est absurde.

Corollaire 19 (coordonnée par coordonnée):
Soit E un espace vectoriel de dimension **finie**, et soient $(\vec{u}_n)$ une suite de vecteurs de E et $\vec{\ell}$ un vecteur. La suite $(\vec{u}_n)$ tend vers $\vec{\ell}$ si, et seulement si, chaque coordonnée de $\vec{u}_n$ tend vers chaque coordonnée de $\vec{\ell}$.

Démonstration:
Soit $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d)$ une base de E. Soit N la norme de E définie comme

$$\begin{aligned} N : E &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_d\vec{e}_d &\longmapsto \max(|x_1|, \dots, |x_d|) \end{aligned}$$

On veut montrer que $\vec{u}_n \to \vec{\ell}$ si, et seulement si, pour $i \in [\![1, d]\!]$, $x_i \to \ell_i$.

$$\begin{aligned} \vec{u}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \vec{\ell} &\iff N(\vec{u}_n - \vec{\ell}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ &\iff \max(|u_{n,1} - \ell_1|, \dots, |u_{n,d} - \ell_d|) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ &\iff \forall i \in [\![1, d]\!], \quad |u_{n,i} - \ell| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Exercice 20:
On a $E = \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, espace de dimension finie. D'où, toutes les normes sur E sont équivalentes. En particulier, $A_n \to L$ si, et seulement si chaque élément de matrice de A_n tend vers chaque élément de matrice de L. Ici,

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -a/n \\ a/n & 1 \end{pmatrix}^n.$$

On a

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+a^2/n^2}} & \frac{-a/n}{\sqrt{1+a^2/n^2}} \\ \frac{a/n}{\sqrt{1+a^2/n^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+a^2/n^2}} \end{pmatrix}}_{(C_1,C_2)\text{ b.o.n}} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}} \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}.$$

D'où,

$$\begin{aligned} A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}^n &= \left(\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}\right)^n \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}^n \\ &= \left(\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}\right)^n \cdot \begin{pmatrix} \cos(n\theta_n) & -\sin(n\theta_n) \\ \sin(n\theta_n) & \cos(n\theta_n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On veut montrer que

$$\begin{cases} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}\right)^n \cos(n\theta_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \cos a, \\ \left(\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}\right)^n \sin(n\theta_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sin a. \end{cases}$$

On a $\left(\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}\right)^n = \exp\left(n \ln \sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}\right)$. Or,

$$n \ln \sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}} = \frac{1}{2} n \ln\left(1 + \frac{a^2}{n^2}\right) = \frac{1}{2} n \left(\frac{a^2}{n^2} + o\left(\frac{a^2}{n^2}\right)\right) = \frac{a^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

D'où, $\left(\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ par continuité de l'exponentielle. Il nous reste à montrer que $n\theta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, car, ensuite par continuité du cosinus et du sinus :

$$\begin{cases} \sin(n\theta_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sin a \\ \cos(n\theta_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \cos a \end{cases}.$$

On a $\cos\theta_n = 1/\sqrt{1+a^2/n^2}$ et $\sin\theta_n = (a/n)/\sqrt{1+a^2/n^2}$. On a donc $\sin\theta_n \to 0$, d'où $\sin\theta_n \to 0$ par continuité de Arcsin, d'où $\sin\theta_n \sim \theta_n$. Et, donc

$$\theta_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{a/n}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}.$$

D'où, $n\theta_n \sim a/\sqrt{1+a^2/n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

5 Adhérence

DÉFINITION 21:
Soit A une partie de E, un espace vectoriel. On dit qu'un vecteur $\vec{\ell} \in E$ est *adhérent* à A, si toute boule centrée en $\vec{\ell}$ rencontre A :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad B(\vec{\ell}, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing.$$

L'*adhérence* de A, notée $\bar{A}$, est l'ensemble des vecteurs adhérents à A.

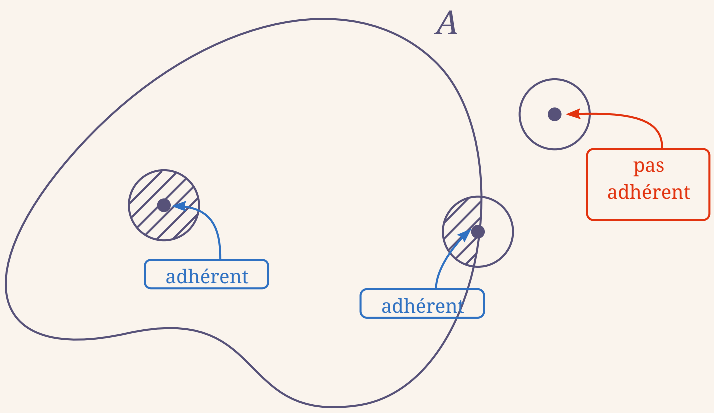

FIGURE 4 – Point adhérent

On a toujours $A \subset \bar{A}$, mais pas forcément $\bar{A} \subset A$ (*c.f.* exemple ci-après).

EXEMPLE 22:
— Soient $I = [0,1]$, $J =]0,1]$ et $K =]0,+\infty[$ trois intervalles de $\mathbb{R}$. On a $\bar{I} = I$, $\bar{J} = I$ et $\bar{K} = [0,+\infty[$.
— L'adhérence $\overline{B(\vec{a},r)}$ d'une boule ouverte $B(\vec{a},r)$ est la boule fermée de même centre $\vec{a}$ et de même rayon r : $\bar{B}(\vec{a},r)$.

PROPOSITION 23 (Caractérisation séquentielle de l'adhérence):
Un vecteur $\vec{\ell} \in E$ est adhérent à $A \subset E$ si, et seulement si $\vec{\ell}$ est la limite d'une suite $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A.

DÉMONSTRATION:

"$\Longrightarrow$" On suppose qu'il existe une suite $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A telle que $\vec{u}_n \to \vec{a}$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\vec{u}_n \to \vec{a}$ (par hypothèse), il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $\|\vec{u}_n - \vec{a}\| < \varepsilon$. D'où, $\vec{u}_n \in B(\vec{a},\varepsilon)$. Or, par hypothèse, $\vec{u}_n \in A$. On en déduit que

$$B(\vec{a},\varepsilon) \cap A \neq \varnothing.$$

"$\Longleftarrow$" Réciproquement, on suppose que, pour tout $\varepsilon > 0$, $B(\vec{a}, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\varepsilon = \frac{1}{n}$. D'où, par hypothèse, $B(\vec{a}, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$. On choisit un élément $\vec{u}_n \in B(\vec{a}, \varepsilon) \cap A$, qui est non vide. D'où, $\vec{u}_n \in A$ et $\|\vec{u}_n - \vec{a}\| < \frac{1}{n}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\vec{u}_n \in A$ et $\vec{u}_n \longrightarrow \vec{a}$.

> DÉFINITION 24:
> Soit A une partie d'un espace vectoriel E. On dit que A est *dense* dans E si $\bar{A} = E$. Autrement dit, tout vecteur de E est adhérent à A. Ou encore, tout vecteur de E est la limite d'une suite de vecteurs de A.

RAPPEL (Caractère archimédien de $\mathbb{R}$):
Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \cdot \varepsilon > 1$.

RAPPEL (Théorème d'approximation de Weierstrass):
Si $f \in \mathscr{C}([a, b])$, il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes convergent uniformément vers f sur $[a, b]$:

$$0 \xleftarrow[\infty \leftarrow n]{} \|P_n - f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} \left|P_n(t) - f(t)\right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Tartes à la crème

EXEMPLE 25:
1. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. D'après le théorème d'approximation de Weierstrass, l'ensemble des fonctions polynomiales est dense dans l'espace vectoriel $\mathscr{C}([a, b])$ des fonctions continues sur un segment muni de la norme infinie (par la caractérisation séquentielle de l'adhérence).

EXERCICE 26:
Montrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles est dense dans $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Montrons que toute matrice est la limite d'une suite de matrices inversibles. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Soit $(B_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ la suite matrice définie comme

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad B_p = A - \frac{1}{p} I_n.$$

D'une part, $B_p \xrightarrow[p \to \infty]{} A$, car $\|B_p - A\| \to 0_{\mathbb{R}}$ en choisissant une norme (peu importe laquelle car l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est de dimension finie) ; en particulier, $B_p \to A$ si, et seulement si chaque élément de B_p tend vers A. D'autre part, à partir d'un certain rang, toutes les matrices B_p sont inversibles, car $\det B_p \neq 0$, car $\det\left(A - \frac{1}{p} I_n\right) \neq 0$, car $\chi_A\left(\frac{1}{p}\right) \neq 0$, car le polynôme χ_A n'a pas infinité de racines.

6 Limite d'une fonction

> DÉFINITION 27:
> Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit f la fonction définie comme
>
> $$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow F \\ \vec{x} &\longmapsto f(\vec{x}) \end{aligned}$$
>
> où $D \subset E$ est une partie de E. Soit $\vec{a}$ un point adhérent à D et $\vec{\ell} \in F$. On dit que $f(\vec{x})$ *tend vers* $\vec{\ell}$ *quand* $\vec{x}$ *tend vers* $\vec{a}$, et on note $f(\vec{x}) \xrightarrow[\vec{x} \to \vec{a}]{} \vec{\ell}$ si
>
> $$\left\|f(\vec{x}) - \vec{\ell}\right\| \xrightarrow[\|\vec{x} - \vec{a}\| \to 0]{} 0.$$
>
> Autrement dit,
>
> $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall \vec{x} \in D, \quad \|\vec{x} - \vec{a}\| \leqslant \delta \implies \|f(\vec{x}) - \vec{\ell}\| \leqslant \varepsilon.$$

Avec cette définition, on a l'équivalence :

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) \xrightarrow[\vec{x}\to\vec{a}]{} \vec{\ell} &\iff f(\vec{x}) - \vec{\ell} \xrightarrow[\vec{x}-\vec{a}\to\vec{0}]{} \vec{0} \\ &\iff \|f(\vec{x}) - \vec{\ell}\| \xrightarrow[\|\vec{x}-\vec{a}\|\to 0]{} 0 \end{aligned}$$

REMARQUE 28: 1. Il y a un abus de notation, la norme $\|\vec{x} - \vec{a}\|$ est une norme sur E tandis que $\|f(\vec{x}) - \vec{\ell}\|$ est une norme sur F.

2. Il 'existe pas toujours de limite $\vec{\ell}$, mais, quand elle existe, elle est unique. On peut donc parler de **la** limite de f en $\vec{a}$ et écrire $\vec{\ell} = \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x})$ ou $\vec{\ell} = \lim_{\vec{a}} f$.

PROPOSITION 29 (Caractérisation séquentielle de la limite):
Le vecteur $f(\vec{x})$ tend vers $\vec{\ell}$ quand $\vec{x}$ tend vers $\vec{a}$ si, et seulement si, pour toute suite $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $\vec{a}$, la suite $f(\vec{u}_n)$ tend vers $\vec{\ell}$.

EXERCICE 30:
Soient les fonctions définies de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *vers* $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad \textit{et} \qquad g(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+2y^2}}$$

possèdent-elles une limite quand (x,y) *tend vers* $(0,0)$ *?*

Étude de *f*. On a $f(x,x) = \frac{xx}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$, et $f(x,0) = \frac{x\times 0}{x^2+0^2} = 0 \xrightarrow[x\to 0]{}$. Or $0 \neq \frac{1}{2}$. D'où, par unicité de la limite, il n'y a pas de limite.

Autre rédaction, on a $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Étude de *g*. Pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$0 \leqslant |f(x,y)| = \frac{|x|\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \frac{\|(x,y)\|_2^2}{\|(x,y)\|_2} = \|(x,y)\|_2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

car $\sqrt{x^2+y^2} \geqslant \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|_2$, et $|x|\,|y| \leqslant \|(x,y)\|_2^2$; en effet, $|x| = \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|_2$, et de même $|y| \leqslant \|(x,y)\|_2$. Par le théorème des gendarmes, on a $|f(x,y)| \to 0$.

7 Continuité d'une fonction

DÉFINITION 31:
Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit $f : D \to F$ une fonction définie sur une partie $D \subset E$ de E.

— Soit $\vec{a} \in D$. On dit que f est *continue* en $\vec{a}$ su $f(\vec{x}) \xrightarrow[\vec{x}\to\vec{a}]{} f(\vec{a})$.

— Soit $A \subset D$. On dit que f est *continue* sur A si f est continue en tout point de A.

Tarte à la crème

EXERCICE 32:
Soient f et g deux applications continues sur un espace vectoriel normé E. Soit A une partie de E dense dans E. Montrer que, si $\forall \vec{x} \in A$, $f(\vec{x}) = g(\vec{x})$, alors $\forall \vec{x} \in E$, $f(\vec{x}) = g(\vec{x})$. Autrement dit, deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.

Soit $\vec{y} \in E$. Comme A est dense dans E, il existe une suite $(\vec{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A convergent vers $\vec{y}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(\vec{a}_n) = g(\vec{a}_n)$. De plus, $f(\vec{a}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\vec{y})$ car f est continue, et $\vec{a}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{y}$. De même, $g(\vec{a}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\vec{y})$. Par unicité de la même limite, on en déduit que $f(\vec{y}) = g(\vec{y})$.

RAPPEL:
On rappelle que f est *continue* si, et seulement si

$$\forall \vec{a} \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_{\vec{a}} > 0,\ \forall \vec{x} \in A, \qquad \|\vec{x} - \vec{a}\| \leqslant \delta_{\vec{a}} \implies \|f(\vec{x}) - f(\vec{a})\| \leqslant \varepsilon.$$

Définition 33:
Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. On dit qu'une fonction f est

— *uniformément continue* sur A si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (\vec{a}, \vec{x}) \in A^2, \qquad \|\vec{x} - \vec{a}\| \leqslant \delta \implies \|f(\vec{x}) - f(\vec{a})\| \leqslant \varepsilon\ ;$$

— *lipschitzienne* sur A si

$$\exists k \in \mathbb{R},\ \forall (\vec{a}, \vec{x}) \in A^2, \qquad \|f(\vec{x}) - f(\vec{a})\| \leqslant k \cdot \|\vec{x} - \vec{a}\|.$$

Exemple 34:
D'après l'exercice 2, toute norme N vérifie l'inégalité

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \qquad \left|N(\vec{x}) - N(\vec{y})\right| \leqslant 1 \cdot N(\vec{x} - \vec{y}).$$

L'application N est donc 1-lipschitzienne de l'espace vectoriel normé E vers $\mathbb{R}$.

Toute norme est lipschitzienne, donc, *a fortiori*, uniformément continue.

Proposition 35:
On a

$$\text{lipschitzienne} \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \text{uniformément continue} \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \text{continue.}$$

Démonstration:
Pour la première implication, on pose $\delta = \varepsilon/k$, et ça marche bien. Pour la seconde implication, on revient à la définition de uniformément continue, ce qui vérifie la définition de continue.

Exercice 36:
1. *Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ est continue mais pas uniformément continue sur* $\mathbb{R}$.
2. *Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue mais pas lipschitzienne sur* $[0,1]$.

1. La fonction $g : x \mapsto x^2$ est continue mais pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. En effet,

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \qquad |h| \leqslant \delta \implies \left|g(a+h) - g(a)\right| \leqslant \varepsilon$$

car $|g(a+h)-g(a)| = |(a+h)^2-a^2| = |2ah+h^2| \leqslant \varepsilon$ si $2|a|\,|h|+|h|^2-\varepsilon \leqslant 0$, donc si $X^2+2|a|X-\varepsilon$ a un discriminant négatif ou nul, mais ce discriminant, donc les racines du polynôme dépend de a.

2. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0,1]$, donc uniformément continue sur $[0,1]$, grâce au théorème de Heine. Mais, $f : x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $[0,1]$. Par l'absurde, supposons la lipschitzienne. Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que, pour tous $(a,x) \in [0,1]^2$, $\left|f(x) - f(a)\right| \leqslant k\,|x-a|$. D'où, pour tous $x \neq a$,

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \leqslant k.$$

Ainsi, comme f est dérivable sur $]0,1]$,

$$\forall a \neq 0, \quad \frac{1}{2\sqrt{a}} = f'(a) = \lim_{x\to a} \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \leqslant K$$

car les inégalités larges passent à la limite. C'est absurde car

$$k \geqslant \lim_{a\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{a}} = +\infty.$$

8 Linéarité & continuité

Théorème 37:
Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit f une application **linéaire** de E vers F. Il y a équivalence entre

1. f est continue sur E ;
2. f est continue en $\vec{0}$;
3. f est bornée dans la boule unité de E ;
5. f est lipschitzienne sur E ;
6. f est uniformément continue ;
4. il existe un réel k tel que $\forall \vec{x} \in E$, $\|f(\vec{x})\| \leqslant k\,\|\vec{x}\|$.

Démonstration:
D'après la proposition 35, on a $5 \implies 6 \implies 1$, et $1 \implies 2$. Montrons ces équivalences avec un « cycle. »

"$2 \implies 3$" Supposons $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $f(\vec{x}) \xrightarrow[\vec{x}\to\vec{0}]{} f(\vec{0}) = \vec{0}$. En particulier,

$$\left\|f(\vec{x}) - \vec{0}\right\| \xrightarrow[\|\vec{x}-\vec{0}\|]{} 0.$$

Montrons que f est bornée sur la boule unité $B(\vec{0},1)$, *i.e.* montrons qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout vecteur $\vec{x} \in B(\vec{0},1)$, $\|f(\vec{x})\| \leqslant M$. Or, par hypothèse,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall \vec{x} \in E, \qquad \|f(\vec{x})\| \leqslant \delta \implies \|f(\vec{x})\| \leqslant \varepsilon.$$

On pose $\varepsilon = 1$, il existe donc $\delta > 0$ tel que $\forall \vec{x} \in E$, $\|\vec{x}\| \leqslant \delta \implies \|f(\vec{x})\| \leqslant 1$. D'où, par linéarité de f,

$$\left\|f\left(\frac{\vec{x}}{\delta}\right)\right\| = \left\|f\left(\frac{1}{\delta}\cdot\vec{x}\right)\right\| = \left\|\frac{1}{\delta}f(\vec{x})\right\| = \frac{1}{\delta}\cdot\|f(\vec{x})\|.$$

Ainsi, pour tout vecteur $\vec{y} \in B(\vec{0},1)$, on a $\|f(\vec{y})\| \leqslant 1/\delta$.

"$3 \implies 4$" On suppose $f \in \mathscr{L}(E,F)$, et que f est bornée sur $B(\vec{0},1)$. On veut montrer qu'il existe un réel $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout vecteur $\vec{x} \in E$, $\|f(\vec{x})\| \leqslant K\|\vec{x}\|$. Par hypothèse, il existe un réel M tel que, pour tout vecteur $\vec{y} \in B(\vec{0},1)$, $\|f(\vec{y})\| \leqslant M$. Soit $\vec{x} \in E$.

— Si $\vec{x} \neq \vec{0}$, soit alors $\vec{y} = \vec{x}/7\|\vec{x}\| \in B(\vec{0},1)$. D'où, $\|f(\vec{y})\| \leqslant M$. Or, $f(\vec{x}/7\|\vec{x}\|) = f(\vec{x})/7\|\vec{x}\|$, car f est linéaire. D'où, $\|f(\vec{x})/7\|\vec{x}\|\| \leqslant M$, et donc $\|f(\vec{x})\|/7\|\vec{x}\| \leqslant M$. On en déduit que

$$\|f(\vec{x})\| \leqslant 7M \times \|\vec{x}\|.$$

— Si $\vec{x} = \vec{0}$, alors $\|f(\vec{0})\| = \|\vec{0}\| \leqslant K\cdot\|\vec{0}\|$, par linéarité.

"$4 \implies 5$" On suppose $f \in \mathscr{L}(E,F)$, et qu'il existe un réel K tel que, pour tout vecteur $\vec{x} \in E$, $\|f(\vec{x})\| \leqslant K\cdot\|\vec{x}\|$. On veut montrer qu'il existe un réel K tel que, pour tous vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y} \in E$, $\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| \leqslant K\cdot\|\vec{x}-\vec{y}\|$. Par linéarité, $f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = f(\vec{x}-\vec{y})$. Et, par hypothèse, $\|f(\vec{x}-\vec{y})\| \leqslant K\|\vec{x}-\vec{y}\|$. Ainsi,

$$\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| \leqslant K\|\vec{x}-\vec{y}\|.$$

Exercice 38:
Soit d l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned} d : \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \mathbb{K}[X] \\ P &\longmapsto P'. \end{aligned}$$

1. *On munit l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de la norme N définie par*

$$\begin{aligned} N : \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n &\longmapsto \max_{i\in[\![0,n]\!]} |a_i|. \end{aligned}$$

Montrer que d n'est pas continue.

2. *On munit le même espace vectoriel de la norme $\|\cdot\|$ définie par $\|P\| = \max_{i\in[\![0,n]\!]} |a_i|/(i+1)$. Montrer que d est continue.*

1. On utilise le théorème précédent. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|X^n\| = 1$, et $d(X^n) = nX^{n-1}$. Ainsi,

$$\|d(X^n)\| = n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

Donc d n'est pas bornée sur la boule unité $B(0,1)$. Cette démonstration est **fausse** en dimension finie dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$.

2. Soit $P \in B(0_{\mathbb{R}[X]},1)$. On pose $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$. Ainsi, $1 \geqslant \max_{i\in[\![1,n]\!]} |a_i|/(i+1)$. On a $P' = a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1} = \sum_{i=1}^n ia_iX^{i-1}$. D'où, $\|P'\| = \max_{i\in[\![0,n]\!]} \frac{|ia_i|}{i}$.???? Non, cette question est fausse, la fonction d n'est pas continue même pour cette nouvelle norme.

THÉORÈME 39:
Soient E et F deux espaces vectoriels normées, et soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Si E est de dimension **finie**, alors f est lipschitzienne, donc continue sur E.

DÉMONSTRATION:
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On suppose E de dimension finie n. On veut montrer qu'il existe un réel k tel que $\|f(\vec{x})\| \leqslant k\, N(\vec{x})$. Par hypothèse, on peut se placer dans une base $(\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$ de E. On peut munir E de la norme $N : x_1\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + x_n\vec{\varepsilon}_n = \max_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i|$. On réalise la démonstration avec cette norme car toutes les normes sur E sont équivalentes, comme $\dim E = n$. Soit $\vec{x} \in E$. On pose $\vec{x} = x_1\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + x_n\vec{\varepsilon}_n$. On calcule

$$\begin{aligned}
\|f(\vec{x})\| &= \|f(x_1\vec{\varepsilon}_1) + \cdots + x_n\vec{\varepsilon}_n\| \\
&= \|x_1 f(\vec{\varepsilon}_1) + \cdots + x_n f(\vec{\varepsilon}_n)\| \\
&\leqslant \|x_1 f(\vec{\varepsilon}_1)\| + \cdots + \|x_n f(\vec{\varepsilon}_n)\| \\
&\leqslant |x_1| \cdot \|f(\vec{\varepsilon}_1)\| + \cdots + |x_n| \cdot \|f(\vec{\varepsilon}_n)\| \\
&\leqslant N(\vec{x}) \big(\underbrace{\|f(\vec{\varepsilon}_1)\| + \cdots + \|f(\vec{\varepsilon}_n)\|}_{k} \big).
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\|f(\vec{x})\| \leqslant k \cdot \|\vec{x}\|$.

EXEMPLE 40:
L'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie, les applications sont continues car linéaires :

1. la trace tr : $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}, A \longmapsto \operatorname{tr} A$;
2. la transposée $\square^\top : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ A \longmapsto A^\top$;
3. une changement de base $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ A \longmapsto P^{-1} \cdot A \cdot P$ où $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

PROPOSITION 41:
Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ et F des espaces vectoriels normés. Soit $f : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ une application multilinéaire. Alors, f est continue si, et seulement s'il existe une réel K tel que

$$\forall \vec{v}_1 \in E_1, \forall \vec{v}_2 \in E_2, \dots, \forall \vec{v}_n \in E_n, \qquad \|f(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)\| \leqslant K\, \|\vec{v}_1\|\, \|\vec{v}_2\| \cdots \|\vec{v}_n\|.$$

C'est le cas si les espaces vectoriels $E_1, \dots, E_n$ sont de dimensions finies.

EXEMPLE 42:
1. Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire, alors ce produit scalaire est continu de E^2 vers $\mathbb{R}$ car il est bilinéaire : $|\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle| \leqslant \|\vec{x}\|\, \|\vec{y}\|$ pour tous vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. La multiplication matricielle, vue comme une application de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{p,n} \longrightarrow \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, est bilinéaire et donc continue, car les espaces sont de dimensions finies.
3. Si $\mathscr{B}$ est une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, alors le déterminant $\det_{\mathscr{B}}$ est continu par sa multilinéarité, car E est de dimension finie.

9 Norme subordonnée

REMARQUE 43:
1. L'ensemble des applications linéaires d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F, est noté $\mathscr{L}(E, F)$. Cet ensemble est un espace vectoriel ; mieux, c'est aussi un anneau (pour les lois $+$ et $\circ$) ; encore mieux, c'est une algèbre.
2. Si on munit chacun des espaces vectoriels E et F d'une norme, alors une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ peut être ou ne pas être continue. On note $\mathscr{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E vers F. C'est une sous-algèbre de $\mathscr{L}(E, F)$.
3. Si E est de dimension finie, les ensembles $\mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{L}_c(E, F)$ sont égaux (théorème 39).

PROPOSITION – DÉFINITION 44:
Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit $f \in \mathscr{L}_c(E, F)$ une application linéaire de E vers F.

1. On appelle *norme subordonnée* (ou norme d'opérateur) de f, notée $|\!|\!| f |\!|\!|$, le plus petit réel K tel que
$$\forall \vec{x} \in E, \qquad \|f(\vec{x})\| \leqslant \|\vec{x}\|.$$

Ainsi, il vaut donc
$$|||f||| = \sup_{\vec{x}\neq\vec{0}} \frac{\|f(\vec{x})\|}{\|\vec{x}\|} = \sup_{\|\vec{x}\|=1} \|f(\vec{x})\|.$$

2. La norme subordonnée est une norme sur l'espace vectoriel $\mathscr{L}_c(E,F)$. Et, cette norme est *sous-multiplicative* :
$$\forall f,g \in \mathscr{L}_c(E,F), \qquad |||f\circ g||| \leqslant |||f|||\cdot|||g|||.$$
(Cette propriété est vraie si l'on peut composer, *i.e.* $F\subset E$.)

DÉMONSTRATION: 1. Comme f est continue, on sait que $\forall\vec{x}\in E$, $\|f(\vec{x})\| \leqslant K\cdot\|\vec{x}\|$. Et, ce réel est minoré par 0. L'ensemble des valeurs de K forment une partie de $\mathbb{R}$ minorée, elle a donc une borne inférieure : $|||f|||$. Et, pour tout vecteur $\vec{x}\neq\vec{0}$, $\|f(\vec{x})\|/\|\vec{x}\| \leqslant K$. D'où, le "meilleur" K est $\sup_{\vec{x}\neq\vec{0}} \|f(\vec{x})\|/\|\vec{x}\|$ car c'est le plus petit majorant. Finalement, pour tout vecteur $\vec{x}\neq 0$, $\|f(\vec{x})\|/\|\vec{x}\| = \left\|f(\vec{x})/\|\vec{x}\|\right\| = \left\|f(\vec{x}/\|\vec{x}\|)\right\|$, et le vecteur $\vec{x}/\|\vec{x}\|$ a pour norme 1. D'où $|||f||| = \sup_{\|\vec{x}\|\neq 1}\|f(\vec{x})\|$.

2. Montrons que l'application $|||\cdot||| : f\mapsto |||f|||$ est une norme.
   — Si $|||f||| = 0_{\mathbb{R}}$, alors, pour tout vecteur $\vec{x}\in E$, $\|f(\vec{x})\| \leqslant 0\cdot\|\vec{x}\|$, d'où $\|f(\vec{x})\| = 0_{\mathbb{R}}$, pour tout vecteur $\vec{x}\in E$. Ainsi, pour tout vecteur $\vec{x}\in E$, $f(\vec{x}) = \vec{0}$. On en déduit $f=0$.
   — Soit $\alpha\in\mathbb{K}$. Ainsi, $|||\alpha f||| = \sup_{\|\vec{x}\|=1}\|\alpha f(\vec{x})\| = |\alpha|\ \sup_{\|\vec{x}\|=1}\|f(\vec{x})\| = |\alpha|\ |||f|||$.
   — On sait que $|||f+g||| = \sup_{\|\vec{x}\|=1}\|(f+g)(\vec{x})\|$. Or, $\forall\vec{x}\in B(\vec{0},1)$, $\|(f+g)(\vec{x})\| = \|f(\vec{x})+g(\vec{x})\| \leqslant \|f(\vec{x})\| + \|g(\vec{x})\| \leqslant |||f||| + |||g|||$, qui est un majorant. Et, le plus petit majorant est $|||f+g|||$. D'où, $|||f+g||| \leqslant |||f||| + |||g|||$.

   Mieux, montrons qu'elle est sous-multiplicative : $|||f\circ g||| \leqslant |||f|||\cdot|||g|||$, *i.e.* $\sup_{\|\vec{x}\|=1}\|f\circ g(\vec{x})\| \leqslant |||f|||\cdot|||g|||$. Pour tout vecteur $\vec{x}$, $\|f\circ g(\vec{x})\| = \left\|f(g(\vec{x}))\right\| \leqslant |||f|||\cdot\|g(\vec{x})\| \leqslant |||f|||\cdot|||g|||\cdot\|\vec{x}\|$. D'où, pour tout vecteur $\vec{x}$, $\|f\circ g(\vec{x})\| \leqslant \underbrace{|||f|||\cdot|||g|||}_{K}\cdot\|\vec{x}\|$. Or, le plus petit K possible est $|||f\circ g|||$. Ainsi, $|||f\circ g||| \leqslant |||f|||\cdot|||g|||$.

EXEMPLE 45:
On munit l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de la norme définie par $\|X\|_\infty = \max_{j\in[\![1,n]\!]}|x_j|$ pour tout vecteur colonne $X = (x_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$. Soit $A\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ une matrice carrée :
$$\forall X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \qquad \|AX\|_\infty \leqslant K\cdot\|X\|_\infty \qquad \text{avec } K = \max_{i\in[\![1,n]\!]}\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$
On a $|||A|||_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]}\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$.

On détermine le plus petit réel K tel que $\|AX\|_\infty \leqslant K\cdot\|X\|$, pour tout vecteur colonne $X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On pose $Y = AX$, et on a $y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j$. Ainsi, $\|AX\| = \max_{i\in[\![1,n]\!]}|y_i|$. Or, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $|y_i| = \left|\sum_{i=1}^n a_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|\cdot|x_j| \leqslant \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|\cdot\|X\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty\sum_{j=1}^n|a_{i,j}|$. On pose ainsi $K = \max_{i\in[\![1,n]\!]}\sum_{j=1}^n|a_{i,j}|$, et on a donc $\|AX\|_\infty \leqslant K\cdot\|X\|_\infty$.

Pour montrer $K = |||A|||_\infty$, il suffit de réaliser l'égalité $\|AX\|_\infty = K\cdot\|X\|_\infty$, pour un vecteur X non nul. On voudrait que $\max_{i\in[\![1,n]\!]}\left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j\right| = \left(\max_{i\in[\![1,n]\!]}\sum_{i=1}^n|a_{i,j}|\right)\times\left(\max_{i\in[\![1,n]\!]}|x_i|\right)$. Il existe $k\in[\![1,n]\!]$, tel que $K = \sum_{j=1}^n|a_{k,j}|$. On choisit $x_j = +1$ si $a_{k,j} > 0$, et $x_j = -1$ si $a_{k,j} \leqslant 0$. (Autrement dit, on a $x_j = \operatorname{sgn} a_{k,j}$.)

EXERCICE 46 (itérées et projecteurs):
Soit E un espace vectoriel normé, et soit $f\in\mathscr{L}_c(E)$ un endomorphisme continu. On suppose que la suite $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ des itérées de f converge. Montrer que :
1. *sa limite est un projecteur,*
2. *sa limite est nulle si $|||f||| < 1$.*

Soit $f\in\mathscr{L}_c(E)$. Soit $\ell\in\mathscr{L}(E)$ telle que $f^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

1. On a $f^{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$, car la suite $(f^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$. L'application $|||\cdot|||$ est sous-multiplicative, d'où
$$\forall(f,g)\in\mathscr{L}_c(E), \qquad |||f\circ g||| \leqslant |||f|||\cdot|||g|||.$$
Ainsi, l'application $\circ$ est continue. D'où, $f^{2n} = f^n\circ f^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell^2$. Par unicité de la limite, $\ell^2 = \ell$, c'est donc un projecteur.

Autre méthode :

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant |||f^{2n} - \ell^2||| &= |||f^n \circ f^n - \ell \circ \ell||| \\
&= |||f^n \circ f^n - f^n \circ \ell + f^n \circ \ell - \ell \circ \ell||| \\
&\leqslant |||f^n \circ f^n - f^n \circ \ell||| + |||f^n \circ \ell - \ell \circ \ell|||
\end{aligned}
$$

par inégalité triangulaire. Ainsi,

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant |||f^{2n} - \ell^2||| &\leqslant |||f^n \circ (f^n - \ell)||| + |||(f^n - \ell) \circ \ell||| \\
&\leqslant |||f^n||| \times \underbrace{|||f^n - \ell|||}_{\to 0} + \underbrace{|||f^n - \ell|||}_{\to 0} \times |||\ell||| \xrightarrow[n-\to\infty]{} 0
\end{aligned}
$$

car, $|||f^n||| \to |||\ell|||$ par hypothèse et continuité de la norme. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $f^{2n} \to \ell^2$.

2. On a $|||f^2||| \leqslant |||f|||^2$, d'où, par récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant |||f^n||| \leqslant |||f|||^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (car $|||f||| \leqslant 1$ par hypothèse). D'après le théorème des gendarmes, on a $|||f^n||| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Or, l'application $|||\cdot|||$ est continue, $|||f^n||| \xrightarrow[n\to\infty]{} |||\ell|||$. Par unicité de la limite, on trouve $|||\ell||| = 0$. On en déduit que $\ell = 0$.

10 Ouverts et fermés

Définition 47:
Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. On dit que

1. un point $\vec{a} \in E$ est *intérieur à A* s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(\vec{a}, \varepsilon) \subset A$;
2. l'ensemble A est un *ouvert* ou une *partie ouverte* de E si, pour tout vecteur $\vec{a} \in A$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(\vec{a}, \varepsilon) \subset A$;
3. l'ensemble A est un *fermé* ou une *partie fermée* de E si son complémentaire $E \setminus A$ est un ouvert de E.

Avec cette définition, la partie A est un ouvert de E si, et seulement si, tout vecteur $\vec{a}$ de A est intérieur à A.

Remarque 48:

1. L'intersection d'une famille d'ouverts n'est pas toujours un ouvert. Contre-exemple :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}.$$

2. L'union d'une famille de fermés n'est pas toujours un fermé. Contre-exemple :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] =]-1, 1[.$$

3. La réunion d'une famille d'ouverts est toujours un ouvert. L'intersection d'une famille de fermés est toujours un fermé.

   Démonstration:
   Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts. On pose $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. Montrons que, pour tout $\vec{x} \in A$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(\vec{x}, \varepsilon) \subset A$. Soit $\vec{x} \in A$. Il existe $i \in I$ tel que $\vec{x} \in A_i$. Or A_i est un ouvert, il existe down $\varepsilon > 0$, tel que $B(\vec{x}, \varepsilon) \subset A_i \subset B$. L'ensemble B est donc un ouvert.

   Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés. On pose $F = \bigcap_{i\in I} F_i$. Montrons que $E \setminus F$ est un ouvert. Or, $E \setminus F = \bigcup_{i\in I} (E \setminus F_i)$, et pour tout $i \in I$, $E \setminus F_i$ est un ouvert. L'union d'une famille d'ouverts est un ouvert. On en déduit que F est un fermé.

4. L'intersection d'une famille **finie** d'ouverts est un ouvert. L'union d'une famille **finie** de fermés est toujours un fermé.

   Démonstration:
   Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille **finie** d'ouverts. Soit $\vec{x} \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Ainsi, pour tout $i \in I$, $\vec{x} \in A_i$. Or, A_i est un ouvert. Il existe donc $\varepsilon_i > 0$ tel que $B(\vec{x}, \varepsilon_i) \subset A_i$. On pose donc $\varepsilon = \min_{i\in I} \varepsilon_i$. Alors, $B(\vec{x}, \varepsilon) \subset \bigcap_{i\in I} A_i$.

   On passe au complémentaire, et on conclut comme dans la démonstration précédente.

Exercice 49:
Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Montrer que

1. *les intervalles $]-\infty, b[$, $]a, b[$, et $]a, +\infty[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$;*
2. *les intervalles $]-\infty, b]$, $[a, b]$, et $[a, +\infty[$ sont des fermés de $\mathbb{R}$;*
3. *l'intervalle $[a, b[$ n'est, ni ouvert, ni fermé.*

1. Montrons que $]-\infty, b[$ est un ouvert. Soit $x \in]-\infty, b[$. On pose $\varepsilon = (b-x)/2$. Ainsi, on a bien $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset]-\infty, b[$. De même pour les autre cas.
2. L'intervalle $]-\infty, b]$ est un fermé, car $\mathbb{R} \setminus]-\infty, b[=]b, +\infty[$ est un ouvert d'après la question précédente. De même pour les autres cas.
3. L'intervalle $[a, b[$ n'est pas un ouvert car, pour tout $\varepsilon > 0$, $B(a, \varepsilon) \not\subset [a, b[$. Et, l'intervalle $[a, b[$ n'est pas un fermé car $\mathbb{R} \setminus [a, b[=]-\infty, a[\cup [b, +\infty[$ n'est pas un ouvert.

Proposition 50:
Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et soit $f : E \longrightarrow F$ une application **continue**. Si B est un ouvert (resp. un fermé) de F, alors $f^{-1}(B)$ est un ouvert (resp. un fermé) de E. Autrement dit, l'image réciproque d'un ouvert (resp. d'un fermé) par une application continue est un ouvert (resp. d'un fermé).

Rappel:
Sans hypothèse sur f et sur B, l'ensemble $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des antécédents des éléments de B. Ainsi,

$$\vec{x} \in f^{-1}(B) \overset{\text{def.}}{\iff} f(\vec{x}) \in B.$$

Démonstration:
Soit $\vec{x} \in f^{-1}(B)$. Ainsi, $f(\vec{x}) \in B$. Or, B est un ouvert de F. Il existe donc $\zeta > 0$ tel que $B\big(f(\vec{x}), \zeta\big) \subset B$. Or, pour tout vecteur $\vec{y} \in F$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\|\vec{x} - \vec{y}\| \leqslant \varepsilon \implies \|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| \leqslant \zeta$, comme f est continue. D'où, $B(\vec{x}, \varepsilon) \subset f^{-1}(B)$. On en déduit que $f^{-1}(B)$ est un ouvert. De même pour un fermé car $E \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(F \setminus B)$.

Exercice 51:
Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue d'un espace vectoriel normé E vers $\mathbb{R}$. Montrer que

1. *l'ensemble $A = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) > 0\}$ des solution de l'inéquation $f(\vec{x}) > 0$ est un ouvert de E;*
2. *l'ensemble $B = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) \geqslant 0\}$ des solution de l'inéquation $f(\vec{x}) \geqslant 0$ est un fermé de E;*
3. *l'ensemble $C = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) = 0\}$ des solution de l'équation $f(\vec{x}) = 0$ est un fermé de E;*

1. On a, $A = f^{-1}(]0, +\infty[)$. Or $]0, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. L'ensemble A est donc l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue donc A est un ouvert.
2. On a, $B = f^{-1}([0, +\infty[)$. Or $[0, +\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$. L'ensemble B est donc l'image réciproque d'un fermé par une fonction continue donc B est un fermé.
3. On a, $C = f^{-1}(\{0\}) \neq f^{-1}(0)$, qui n'existe pas car f n'est pas forcément bijective. Or $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. L'ensemble C est donc l'image réciproque d'un fermé par une fonction continue donc C est un fermé.

Exemple:
L'équation $y = x^2$ est celle d'une parabole, et cette parabole est un fermé de $\mathbb{R}^2$. En effet, l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$ avec $f(x, y) = y - x^2$. Or, $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$, et l'application f est continue. Donc, la parabole d'équation $y = x^2$ est l'image réciproque d'une fonction continue, donc c'est un fermé.

De même, pour la courbe d'équation $y^3 - 3x^2 = 7$ est aussi un courbe fermée du plan $\mathbb{R}^2$: c'est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $f : (x, y) \mapsto y^3 - 3x^2 - 7$.

Exemple 52:
Une boule ouverte est un ouvert. Une boule fermée est un fermé. Une sphère est un fermé.

En effet, $B(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \in E \mid \|\vec{x} - \vec{a}\| < r\} = f^{-1}(]-\infty, r[)$ en choisissant $f : \vec{x} \mapsto \|\vec{x} - \vec{a}\|$. Or, $]-\infty, r[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, f est continue car toute norme est 1-lipschitzienne. Donc $B(\vec{a}, r)$ est un ouvert. De même pour $\bar{B}(\vec{a}, r)$ et $\bar{B}(\vec{a}, r) \setminus B(\vec{a}, r)$.

Exercice 53:
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que tout hyperplan de E est un fermé. Soit H un

hyperplan d'un espace vectoriel normé de dimension finie. L'hyperplan H est le noyau d'une forme linéaire φ non nulle. Ainsi, $H = \operatorname{Ker}\varphi$, et $\varphi : E \xrightarrow{\text{linéaire}} \mathbb{R}$. L'application φ est continue comme le sont toutes les applications linéaires sur un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $\vec{x} \in E$: $\vec{x} \in H \iff \varphi(\vec{x}) = 0$. Donc $H = \varphi^{-1}(\{0\})$. D'où, H est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par la fonction continue φ : c'est donc un fermé de E.

Proposition 54:
Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E.

1. Son adhérence $\bar{A}$ est un fermé de E.
2. La partie A est un fermé de E si, et seulement si $A = \bar{A}$.
3. L'ensemble A est un fermé de E si, et seulement si, à chaque fois qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A converge, la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à A. (caractérisation séquentielle d'un fermé).

Démonstration:
1. Montrons que $E\setminus\bar{A}$ est un ouvert. Soit $\vec{x} \in E\setminus\bar{A}$. Alors $x \notin \bar{A}$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(\vec{x},\varepsilon)\cap A = \varnothing$. Soit $\vec{y} \in B(\vec{x},\varepsilon)$. Ainsi, $\vec{y} \notin \bar{A}$. Or, $B(\vec{x},\varepsilon)$ est in ouvert, il existe donc $\zeta > 0$ tel que $B(\vec{y},\zeta) \subset B(\vec{x},\varepsilon)$. D'où, il existe $\zeta > 0$ tel que $B(\vec{y},\zeta) \cap A = \varnothing$. Alors, $\vec{y} \notin \bar{A}$. D'où, $B(\vec{x},\varepsilon) \cap \bar{A} = \varnothing$. On en déduit $B(\vec{x},\varepsilon) \subset E \setminus \bar{A}$.
2. Le point 1 démontre déjà la réciproque. Il nous suffit de montrer l'implication, *c.f.* poly.
3. On utilise la caractérisation séquentielle de l'adhérence (proposition 23).