Chapitre 12

Endomorphisme remarquable e

Hugo Salou MPI*
Dernière mise à jour le 8 février 2023

1 Qu'est ce qu'une matrice orthogonale ?

Définition 1:
On dit qu'une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est *orthogonale* si $A^\top \cdot A = I_n$. L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{O}(n)$, et est appelé le *groupe orthogonal* d'ordre n.

Remarque 2:
Le déterminant d'une matrice orthogonale vaut ± 1. En effet, $1 = \det I_n = \det(A^\top \cdot A) = \det A^\top \cdot \det A = \left[\det A\right]^2$. Ainsi, toute matrice orthogonale est inversible :

$$A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \implies \det A = \pm 1 \implies \det A \neq 0 \implies A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

On en déduit que

$$A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \iff A^\top \cdot A = I_n \iff A^\top \cdot A^{-1} \iff A \cdot A^\top = I_n.$$

En effet, $A^\top \cdot A = I_n$ et donc $A^\top \cdot A \cdot A^{-1} = A^{-1}$. D'où, $A^\top = A^{-1}$.

Le sous-ensemble des matrices orthogonales dont le déterminant vaut $+1$ est noté $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, ou $\mathrm{SO}(n)$, et est appelé *groupe spécial orthogonal* d'ordre n. Ainsi,

$$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 3:
Montrer que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ *est un sous-groupe de* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$*, qui est un sous-groupe de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$*. Vérifier, par ailleurs, que ces ensembles sont stables par transposition.*

L'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est non vide. En effet, $I_n \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ car $\det I_n = 1$ et $I_n^\top \cdot I_n = I_n \cdot I_n = I_n$. De plus, si $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, alors $(A \cdot B^{-1})^{-1} = B \cdot A^{-1} = (B^\top)^\top \cdot A^\top = (A \cdot B)^\top$, d'où $A \cdot B \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. On en déduit que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

L'ensemble $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est non vide. En effet, $I_n \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ car $\det I_n = 1$ et $I_n^\top \cdot I_n = I_n \cdot I_n = I_n$. De plus, si $A \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(A \cdot B^{-1}) = \det A \cdot \det(B^{-1}) = 1 \times \frac{1}{1} = 1$, et $(A \cdot B^{-1})^{-1} = B \cdot A^{-1} = (B^\top)^\top \cdot A^\top = (A \cdot B)^\top$, d'où $A \cdot B \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. On en déduit que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, on a $A^{-1} = A^\top$, et $A^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, d'où $A^\top \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. On en déduit que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est stable par transposition. Ce raisonnement reste valide en remplaçant $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ par $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 4:
Une matrice est orthogonale si, et seulement si, ses colonnes (ou ses lignes) forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (muni du produit scalaire canonique). Autrement dit : une matrice est orthogonale si, et seulement si c'est la matrice de passage d'une base orthonormée de E vers une autre base orthonormée de E.

Démonstration:
On note C_n, C_2, ..., C_n les colonnes de $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} A^\top \cdot A = I_n &\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \langle C_i \mid C_j \rangle = \delta_{i,j} \\ &\iff (C_1, \dots, C_n) \text{ est une base orthonormée.} \end{aligned}$$

Et, si A est orthogonale, $A^\top$ l'est aussi. Or, la transposition change les colonnes en lignes.

Méthode 5:
En particulier, soit A une matrice 3×3 de colonnes C_1, C_2, et C_3. Il suffit de vérifier que

- (C_1, C_2) est une famille orthonormée, et $C_1 \wedge C_2 = \pm C_3$ pour montrer $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$;
- (C_1, C_2) est une famille orthonormée, et $C_1 \wedge C_2 = +C_3$ pour montrer $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 6:

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Étudier les matrices

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \end{matrix} \\ \begin{matrix} f(\vec{\imath}) & f(\vec{\jmath}) \end{matrix} & \end{array} = [\,f\,]_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}),$$

$$B = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \end{matrix} \\ \begin{matrix} g(\vec{\imath}) & g(\vec{\jmath}) \end{matrix} & \end{array} = [\,g\,]_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}),$$

$$C = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \overset{h(\vec{\imath})}{C_1} & \overset{h(\vec{\jmath})}{C_2} & \overset{h(\vec{k})}{C_3} \end{matrix} & \end{array} = [\,h\,]_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}$$

$$D = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{matrix} \\ \begin{matrix} u(\vec{\imath}) & u(\vec{\jmath}) & u(\vec{k}) \end{matrix} & \end{array} = [\,u\,]_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}$$

La matrice A est la rotation d'angle θ. La matrice B est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}(\vec{a})$. De plus, $B^\top = B^{-1} = B$, et, dans une base adaptée $(\vec{a}, \vec{b})$, l'endomorphisme g devient

$$[\,g\,]_{(\vec{a},\vec{b})} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{matrix} \\ \begin{matrix} g(\vec{a}) & g(\vec{b}) \end{matrix} & \end{array} = B'.$$

La matrice C est diagonale par blocs, donc triangulaire par blocs, donc $\det C = \det A \times 1 = +1$. Les colonnes C_1, C_2 et C_3 de la matrice C forment une base orthonormée, d'où $C \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$. De plus, $\det C = +1$, donc $C \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. On remarque que $h(\vec{k}) = \vec{k}$. La matrice C est donc la rotation d'angle θ de l'axe $(O, \vec{k})$. On remarque que $u(\vec{\jmath}) = \vec{\jmath}$, $u(\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}) = \vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$, $u(\vec{\imath}, \vec{k}) = \vec{\imath}+\vec{k}$ et $g(\vec{\imath} - \vec{k}) = \vec{k} - \vec{\imath}$. Ainsi, $\mathrm{SEP}(1) = \mathrm{Vect}(\vec{\jmath}, \vec{\imath} + \vec{k})$, et $\mathrm{SEP}(-1) = \mathrm{Vect}(\vec{\imath} - \vec{k})$. Les colonnes de D forment une base orthonormée, d'où $D \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$. Or, $\det D = -1$ en développant, d'où $D \notin \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Enfin, $\vec{u}$ est la symétrie de orthogonale par rapport à $\mathrm{SEP}(1) = \mathrm{Vect}(\vec{\jmath}, \vec{\imath} + \vec{k})$. Ainsi,

$$[\,u\,]_{(\vec{\jmath},\vec{\imath}+\vec{k},\vec{\imath}-\vec{k})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vec{\jmath} \\ 0 & 1 & 0 & \vec{\imath}+\vec{k} \\ 0 & 0 & -1 & \vec{\imath}-\vec{k} \end{pmatrix}.$$

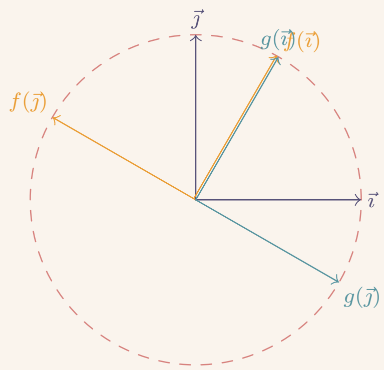

Figure 1 – Représentation des endomorphismes représentés par les matrices A et B de l'exercice précédent

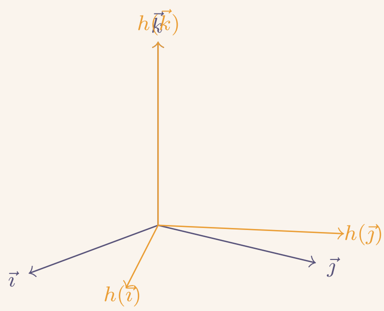

Figure 2 – Représentation de l'endomorphisme représenté par la matrices C de l'exercice précédent

2 Isométries vectorielles

Définition 7:
Soit un espace euclidien E, et soit $f : E \to E$. On dit que f est une *isométrie vectorielle* si f conserve le produit scalaire

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad \big\langle f(u) \mid f(v) \big\rangle = \langle u \mid v \rangle.$$

L'ensemble des isométries vectorielles de E est noté $\mathrm{O}(E)$. Une isométrie vectorielle est aussi appelé un *automorphisme orthogonal* d'après les propositions suivantes.

Proposition 8:
Toute isométrie vectorielle de E est linéaire et bijective. Autrement dit, toute symétrie vectorielle de E est un automorphisme de E. Mieux : l'ensemble $\mathrm{O}(E)$ des isométries de E est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$ des automorphismes de E.

Démonstration:
Soit $f \in \mathrm{O}(E)$ une isométrie de E. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}$ et soient $(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$. On veut montrer que :

$$\begin{aligned}
& f(a\,\vec{u} + b\,\vec{v}) = a\,f(\vec{u}) + b\,f(\vec{v}) \\
\iff & f(a\,\vec{u} + b\,\vec{v}) = \vec{0} \\
\iff & \big\| f(a\,\vec{u} + b\,\vec{v}) \big\| = \|\vec{0}\| = 0_{\mathbb{R}} \\
\iff & \big\langle f(a\,\vec{u} + b\,\vec{v} - a\,f(\vec{u}) + b\,f(\vec{v}) \;\big|\; f(a\,\vec{u} + b\,\vec{v} - a\,f(\vec{u}) + b\,f(\vec{v}) \big\rangle = 0
\end{aligned}$$

Par bilinéarité du produit scalaire, ce grand produit scalaire peut-être décomposé en 9 facteurs, et on n'en traitera qu'un :

$$\big\langle -a\,f(\vec{u}) \;\big|\; -b\,f(\vec{v}) \big\rangle = (-a)(-b)\big\langle f(\vec{u}) \;\big|\; f(\vec{v}) \big\rangle = (-a)(-b)\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle = \langle -a\vec{u} \mid -b\vec{v} \rangle.$$

En répétant 9 fois ce calcul, on arrive à l'équivalence

$$\iff \| \underbrace{a\,\vec{u} + b\,\vec{v} - a\,\vec{u} - b\,\vec{v}}_{\vec{0}} \| = 0,$$

ce qui est vrai.

Montrons la bijectivité de f. Mais, comme $f : E \to E$, avec E de dimension finie, et f est linéaire, on a donc

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective},$$

d'après le théorème du rang. Soit $\vec{x} \in E$:

$$\begin{aligned}
\vec{x} \in \operatorname{Ker} f \iff & f(\vec{x}) = \vec{0} \\
\implies & \big\| f(\vec{x}) \big\| = 0 \\
\implies & \big\langle f(\vec{x}) \mid f(\vec{x}) \big\rangle = 0 \\
\implies & \langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle = 0 \text{ car } f \text{ est une isométrie} \\
\implies & \vec{x} = \vec{0} \text{ par le caractère défini du produit scalaire.}
\end{aligned}$$

Réciproquement, on a bien $f(\vec{0}) = \vec{0}$, et donc $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$, d'où f injective, et donc bijective.

La suite de la preuve se trouve sur le poly.

Théorème 9 (3/4 caractérisations d'une isométrie):
Soit E un espace euclidien, et soit $f : E \to E$. *Il existe 4 manières de caractériser une isométrie, dont 3 sont prouvés ici.*

$$f \text{ conserve le produit scalaire}$$
$$\Updownarrow$$
$$f \text{ est linéaire et conserve la norme :}$$
$$\forall \vec{u} \in E, \quad \|f(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$$
$$\Updownarrow$$
$$f \text{ est linéaire et transforme une base orthonormée de } E$$
$$\text{en une base orthonormée de } E.$$

Démonstration:
Cette preuve se déroule en trois étapes :

$$\begin{tikzcd}
 & (2) \arrow[dl, Rightarrow] & \\
(1) \arrow[rr, Rightarrow] & & (3) \arrow[ul, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

— On suppose f linéaire, et $\forall \vec{u} \in E$, $\|f(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$. On veut montrer que $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$, $\langle f(\vec{u}) \mid f(\vec{v}) \rangle = \langle u \mid v \rangle$. On se rappelle que $\langle \vec{a} \mid \vec{b} \rangle = \frac{1}{2}\left(\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|^2\right)$. D'où,

$$\begin{aligned}
\langle f(\vec{u}) \mid f(\vec{v}) \rangle &= \frac{1}{2}\left(\|f(\vec{u}) + f(\vec{v})\|^2 - \|f(\vec{u})\|^2 - \|f(v)\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\|f(\vec{u} + \vec{v})\|^2 - \|f(\vec{u})\|^2 - \|f(v)\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|v\|^2\right) \\
&= \langle u \mid v \rangle
\end{aligned}$$

— On suppose f une isométrie. Alors f est linéaire d'après la proposition 8, et l'application f transforme une base orthonormée en une autre base orthonormée.

— ⚠ Tarte à la crème. On suppose f linéaire, et qu'elle transforme une base orthonormée en une autre base orthonormée. On veut montrer f linéaire (vrai par hypothèse), et que $\forall \vec{u} \in E$, $\|f(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$. Soit $\vec{u} \in E$. On le décompose dans la base orthonormée $\mathscr{B} = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_n)$:

$$\vec{u} = x_1\vec{\varepsilon}_1 + x_2\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + x_n\vec{\varepsilon}_n.$$

Par linéarité de f, on a $f(\vec{u}) = x_1\, f(\vec{\varepsilon}_1) + x_2\, f(\vec{\varepsilon}_2) + \cdots + x_n\, f(\vec{\varepsilon}_n)$. Ainsi, comme la base $\mathscr{B}$ est une famille orthogonale, d'après le théorème de Pythagore, on a

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}\|^2 &= \|x_1\, \vec{\varepsilon}_1\|^2 + \|x_1\, \vec{\varepsilon}_2\|^2 + \cdots + \|x_1\, \vec{\varepsilon}_n\|^2 \\
&= x_1^2\, \|\vec{\varepsilon}_1\|^2 + x_2^2\, \|\vec{\varepsilon}_2\|^2 + \cdots + x_n^2\, \|\vec{\varepsilon}_n\|^2 \\
&= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2
\end{aligned}$$

La base $\mathscr{B}' = \big(f(\vec{\varepsilon}_1), f(\vec{\varepsilon}_2), \ldots, f(\vec{\varepsilon}_n)\big)$ est orthonormée, on a de même,

$$\|f(\vec{u})\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2.$$

Proposition 10:
Soit E un espace euclidien de dimension n.

$$f \text{ est une isométrie de } E \iff \begin{array}{l}\text{la matrice de } f\text{, dans}\\ \text{une \underline{base orthonormée},}\\ \text{est orthogonale.}\end{array}$$

Autrement dit,

$$f \in \mathrm{O}(E) \iff \big[\, f \,\big]_{\mathscr{B}} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}),$$

où $\mathscr{B}$ est une base orthonormée.

3 Endomorphismes adjoints

Définition 11:
On dit qu'un endomorphisme $f : E \to E$ est *autoadjoint* si

$$\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \quad \big\langle f(\vec{u}) \,\big|\, \vec{v} \big\rangle = \big\langle \vec{u} \,\big|\, f(\vec{v}) \big\rangle.$$

Un endomorphisme autoadjoint est aussi appelé endomorphisme *symétrique* (*c.f.* proposition suivante). L'ensemble des endomorphismes autoadjoints est noté $\mathcal{S}(E)$.

Proposition 12:
Un endomorphism est autoadjoint si, et seulement si la matrice de F dans une base orthonormée $\mathscr{B}$ est orthogonale. Autrement dit :

$$f \in \mathcal{S}(E) \iff \big[\, f \,\big]_{\mathscr{B}} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

Démonstration: $\implies$ Soit $\mathscr{B} = (\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$ une base orthonormée de E. Ainsi,

$$\forall i,\ \forall j, \quad \big\langle f(\vec{\varepsilon}_i) \,\big|\, \vec{\varepsilon}_j \big\rangle = \big\langle \vec{\varepsilon}_i \,\big|\, f(\vec{\varepsilon}_j) \big\rangle.$$

On pose $\big[\, f \,\big]_{\mathscr{B}} = (a_{i,j})$:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} & a_{1,j} & & \vec{\varepsilon}_i \\ & a_{i,j} & & \vec{\varepsilon}_i \\ & a_{n,j} & & \vec{\varepsilon}_n \end{pmatrix}. \\ \begin{array}{ccc} f(\vec{\varepsilon}_i) & f(\vec{\varepsilon}_j) & f(\vec{\varepsilon}_n) \end{array} \end{array}$$

Ainsi, $f(\vec{\varepsilon}_j) = a_{1,j}\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + a_{i,j}\vec{\varepsilon}_i + \cdots + a_{n,j}\vec{\varepsilon}_n$. D'où, $\langle \vec{\varepsilon}_i \mid f(\vec{\varepsilon}_j) \rangle = a_{i,j}$ car la base $\mathscr{B}$ est orthonormée. De même avec l'autre produit scalaire, $\langle f(\vec{\varepsilon}_i) \mid \vec{\varepsilon}_j \rangle$, d'où $a_{i,j} = a_{j,i}$ par symétrie du produit scalaire. On en déduit que $\big[\, f \,\big]_{\mathscr{B}} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

$\impliedby$ Si $\big[\, f \,\big]_{\mathscr{B}} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors $\langle f(\vec{\varepsilon}_i) \mid \vec{\varepsilon}_j \rangle = \langle \vec{\varepsilon}_i \mid f(\vec{\varepsilon}_j) \rangle$. Or, on pose $\vec{u} = x_1\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + x_n\vec{\varepsilon}_n$, et $\vec{v} = y_1\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + y_n\vec{\varepsilon}_n$.

$$\begin{aligned} \langle f(\vec{u}) \mid \vec{v} \rangle &= \langle x_1 f(\vec{\varepsilon}_1) + \cdots + x_n f(\vec{\varepsilon}_n) \mid y_1 f(\vec{\varepsilon}_1) + \cdots + y_n f(\vec{\varepsilon}_n) \rangle \\ &= \Big\langle \sum_{i=1}^{n} x_i f(\vec{\varepsilon}_i) \,\Big|\, \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{\varepsilon}_j \Big\rangle \\ &= \sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} x_i y_j \,\langle f(\vec{\varepsilon}_i) \mid \vec{\varepsilon}_j \rangle \end{aligned}$$

De même en inversant $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On en déduit donc $\langle f(\vec{u} \mid \vec{v} \rangle = \langle \vec{u} \mid f(\vec{v}) \rangle$.

Exercice 13: 1. Si f est autoadjoint, montrons que $\operatorname{Ker} f \perp \operatorname{Im} f$, et $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$. On suppose $\forall \vec{u}$, $\forall \vec{v}$, $\langle f(\vec{u}) \mid \vec{v} \rangle = \langle \vec{u} \mid f(\vec{v}) \rangle$. Soit $\vec{u} \in \operatorname{Ker} f$, et soit $\vec{v} \in \operatorname{Im} f$. On sait que $f(\vec{u}) = \vec{0}$, et qu'il existe $\vec{x} \in E$ tel que $\vec{v} = f(\vec{x})$. Ainsi,

$$\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle = \langle \vec{u} \mid f(\vec{x}) \rangle = \langle f(\vec{u}) \mid \vec{x} \rangle = 0.$$

D'où $\vec{u} \perp \vec{v}$. Ainsi, $\operatorname{Ker} f \perp \operatorname{Im} f$.
De plus, E est de dimension finie, d'où, d'après le théorème du rang,

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E.$$

Aussi, $\operatorname{Ker} f \oplus (\operatorname{Ker} f)^\perp = E$, donc $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Ker} f)^\perp = \dim E$. On en déduit donc que $\dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\operatorname{Ker} f)^\perp$. Or, $\operatorname{Im} f \subset (\operatorname{Ker} f)^\perp$ car $\operatorname{Im} f \perp \operatorname{Ker} f$. Ainsi $\operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^\perp$, on en déduit que

$$\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = E.$$

$\Longleftarrow$ Soit p la projection sur F parallèlement à G. Supposons l'endomorphisme P autoadjoint. D'après la question 1., le $\operatorname{Ker} p \perp \operatorname{Im} p$. Ainsi, $F = \operatorname{Im} p$ et $G = \operatorname{Ker} p$. D'où, $F \perp G$, p est donc une projection orthogonale.

$\Longrightarrow$ Réciproquement, supposons p une projection orthogonale. Soit $\mathscr{B} = (\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_q)$ une base orthonormée de F. Ainsi, pour tout $\vec{x} \in E$,

$$p(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{q} \langle \vec{x} \mid \vec{\varepsilon}_i \rangle \; \vec{\varepsilon}_i.$$

On veut montrer que l'endomorphisme p est autoadjoint. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E.

$$\begin{aligned}\langle p(\vec{u}) \mid \vec{v} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{q} \langle \vec{u} \mid \vec{\varepsilon}_i \rangle \, \vec{\varepsilon}_i \;\middle|\; \vec{v} \right\rangle &= \sum_{i=1}^{q} \langle u \mid \vec{\varepsilon}_i \rangle \; \langle \vec{\varepsilon}_i \mid v \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{q} \langle v \mid \vec{\varepsilon}_i \rangle \; \langle \vec{\varepsilon}_i \mid u \rangle \\ &= \langle \vec{u} \mid p(\vec{v}) \rangle\end{aligned}$$

Autre méthode, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E,

$$\begin{aligned}\langle p(\vec{u}) \mid \vec{v} \rangle &= \langle p(\vec{u}) \mid p(\vec{v}) + \vec{v} - p(\vec{v}) \rangle \\ &= \langle p(\vec{u}) \mid p(\vec{v}) \rangle + \langle p(\vec{u}) \mid \vec{v} - p(\vec{v}) \rangle \\ &= \langle p(\vec{u}) \mid p(\vec{v}) \rangle + \langle u - p(\vec{u}) \mid p(\vec{v}) \rangle \\ &= \langle \vec{u} \mid p(\vec{v}) \rangle\end{aligned}$$

car p est orthogonale.

Proposition – Définition 14:
Si f est un endomorphisme d'un espace euclidien E, alors il existe un unique endomorphisme de E, noté $f^\star$ et appelé l'*adjoint* de f, tel que

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2, \qquad \langle f^\star(\vec{u}) \mid \vec{v} \rangle = \langle \vec{u} \mid f(\vec{v}) \rangle .$$

Si A est la matrice f dans une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E, alors $A^\top$ est la matrice de $f^\star$ dans $\mathscr{B}$:

$$\left[\, f \,\right]_{\mathscr{B}} = \left[\, f \,\right]_{\mathscr{B}}^{\top}.$$

Démonstration:
Soit $\vec{u} \in E$. L'application

$$\begin{aligned}\varphi : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{v} &\longmapsto \langle \vec{u} \mid f(\vec{v}) \rangle .\end{aligned}$$

La forme φ est linéaire car $\varphi(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2) = \langle \vec{u} \mid f(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2) \rangle = \langle \vec{u} \mid \alpha_1 f(\vec{v}_1) + \alpha_2 f(\vec{v}_2) \rangle = \alpha_1 \langle \vec{u} \mid f(\vec{v}) \rangle + \alpha_2 \langle \vec{u} \mid f(\vec{v}_2) \rangle = \alpha_1\varphi(\vec{v}_1) + \alpha_2\varphi(\vec{v}_2)$. D'où, d'après le théorème de Riesz, il existe un unique vecteur $\vec{a} \in E$ tel que $\varphi(\vec{v}) = \langle \vec{a} \mid \vec{v} \rangle$ pour tout $\vec{v} \in E$. Ainsi, pour tout vecteur $\vec{v} \in E$, $\langle \vec{u} \mid f(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{a} \mid \vec{v} \rangle$. On note $\vec{a} = f^\star(\vec{u})$. Soit l'application

$$\begin{aligned}f^\star : E &\longrightarrow E \\ \vec{u} &\longmapsto f^\star(\vec{u}).\end{aligned}$$

La démonstration telle que $f^\star$ est linéaire est dans le poly. L'application $f^\star$ vérifie : $\langle \vec{u} \mid f(\vec{v}) \rangle = \langle f^\star(\vec{u}) \mid \vec{v} \rangle$, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. *Quelle est la matrice de $f^\star$, dans une base orthonormée ?* Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E, et soient $A = \left[\, f \,\right]_{\mathscr{B}}$, $B = \left[\, f^\star \,\right]_{\mathscr{B}}$, $U = \left[\, \vec{u} \,\right]_{\mathscr{B}}$, et $V = \left[\, \vec{v} \,\right]_{\mathscr{B}}$. Les matrices U et V sont des vecteurs colonnes, et A et B sont des matrices carrées. Ainsi,

$$U^\top \cdot A \cdot V = \langle \vec{u} \mid f(\vec{v}) \rangle = \langle f^\star(\vec{u}) \mid \vec{v} \rangle = (B \cdot U)^\top \cdot V,$$

ce qui est vrai quelque soit les vecteurs colonnes U et V. D'où, $\forall U, \forall V$, $U^\top \cdot (A \cdot V) = U^\top \cdot (B^\top \cdot V)$. Ainsi, pour tous vecteurs U et V,

$$U^\top \cdot \Big[(AV) - (B^\top V) \Big] = 0.$$

En particulier, si $U = (AV) - (B^\top V)$, le produit scalaire $\langle \vec{u} \mid \vec{u} \rangle$ est nul, donc $U = 0$. Ainsi,

$$\forall V, \quad A \cdot V = B^\top \cdot V.$$

De même, on conclut que $A = B^\top$. On en déduit donc que

$$[\, f^\star \,]_{\mathscr{B}} = [\, f \,]_{\mathscr{B}}^\top.$$

Les propriétés suivantes sont vrais :

— $(f \circ g)^\star = g^\star \circ f^\star$, $\quad (f^\star)^\star = f$, $\quad$ et $\quad (\alpha f + \beta g)^\star = \alpha f^\star + \beta g^\star$;

— $(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$, $\quad (A^\top)^\top = A$, $\quad$ et $\quad (\alpha A + \beta B)^\top = \alpha A^\top + \beta B^\top$.

Des deuxièmes et troisièmes points, il en résulte que les applications $f \mapsto f^\star$, et $A \mapsto A^\top$ sont des applications involutives.

On rappelle que $\langle \vec{u} \mid f(\vec{v}) \rangle = \langle f^\star(\vec{u}) \mid \vec{v} \rangle$, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Proposition 15:
Soit $f : E \to E$, un endomorphisme d'un espace euclidien E.

1. f est autoadjoint si, et seulement si, $f^\star = f$;
2. f est une isométrie si, et seulement si, $f^\star = f^{-1}$.

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} f \text{ est autoadjoint} &\overset{\text{def.}}{\iff} \langle \vec{u} \mid f(\vec{v}) \rangle = \langle f(\vec{u}) \mid \vec{v} \rangle \text{ pour tous vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \\ &\iff f^\star = f \\ &\iff [\, f \,]_{\mathscr{B}}^\top = [\, f \,]_{\mathscr{B}} \text{ dans une base orthonormée } \mathscr{B}. \end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned} f \text{ est une isométrie} &\overset{\text{def.}}{\iff} \langle f(\vec{u}) \mid f(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle \text{ pour tous vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \\ &\iff [\, f \,]_{\mathscr{B}}^\top = [\, f \,]_{\mathscr{B}}^{-1} \text{ dans une base orthonormée } \mathscr{B} \\ &\iff f^\star = f^{-1}. \end{aligned}$$

Ce qui prove la proposition précédente.

Exercice 16:
Soit E un espace euclidien, et soit F un sous-espace vectoriel de E. On a $F \oplus F^\perp = E$. Soit $\mathscr{s} \in \mathscr{L}(E, E)$. Montrons que $\mathscr{s}$ est une symétrie orthogonale si, et seulement si $\mathscr{s}$ est une symétrie autoadjointe.

« $\Longleftarrow$ » L'application $\mathscr{s}$ est une isométrie donc $\mathscr{s}^\star = \mathscr{s}^{-1}$. L'application $\mathscr{s}$ est un endomorphisme autoadjoint donc $\mathscr{s}^\star = \mathscr{s}$. D'où $\mathscr{s} = \mathscr{s}^{-1}$, donc $\mathscr{s}$ est une symétrie. Ainsi $\operatorname{Ker}(\mathscr{s} - \mathrm{id}) \perp \operatorname{Ker}(\mathscr{s} + \mathrm{id})$.

« $\Longrightarrow$ » L'application $\mathscr{s}$ est une symétrie orthogonale, d'où $E = F + F^\perp$ en appelant $F = \operatorname{Ker}(\mathscr{s} - \mathrm{id})$. Ainsi, pour tout vecteur $\vec{x} \in E$, il existe un unique couple $(\vec{a}, \vec{b}) \in F \times F^\perp$ tel que $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$. D'où, $\mathscr{s}(\vec{x}) = \mathscr{s}(\vec{a}) + \mathscr{s}(\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$. D'où $\|\vec{x}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$ et $\|\mathscr{s}(\vec{x})\|^2 = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$. Ainsi, $\mathscr{s}$ conserve la norme, c'est donc une isométrie, donc $\mathscr{s}^\star = \mathscr{s}^{-1}$ De plus, $\mathscr{s}$ est une symétrie donc $\mathscr{s} = \mathscr{s}^{-1}$. D'où, $\mathscr{s} = \mathscr{s}^\star$, donc $\mathscr{s}$ est autoadjoint.

4 Stabilité de l'orthogonal

Proposition 17:
Soit f un endomorphisme autoadjoint de E, et soit f un sous-espace vectoriel de E. Si F est stable par f, alors $F^\perp$ est aussi stable par f.

Démonstration:
On suppose, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\langle f(\vec{u}) \mid \vec{v}\rangle = \langle \vec{u} \mid f(\vec{v})\rangle$, et pour tout vecteur $\vec{x} \in F$, $f(\vec{x}) \in F$. Soit $\vec{x} \in F^\perp$. Soit $\vec{y} \in F$. On calcule : $\langle f(\vec{x}) \mid \vec{y}\rangle = \langle \vec{x} \mid f(\vec{y})\rangle$. Or, $\vec{y} \in F$, et donc $f(\vec{y}) \in F$ par hypothèse. Comme $\vec{x} \in F^\perp$. Ainsi, $\langle \vec{x} \mid f(\vec{y})\rangle = 0$, et donc $\langle f(\vec{x}) \mid \vec{y}\rangle = 0$. D'où, $f(\vec{x}) \perp \vec{y}$. Ainsi, $f(\vec{x}) \in F^\perp$, d'où $F^\perp$ est stable par f.

Proposition 18:
Soit f une isométrie vectorielle de E, et soit f un sous-espace vectoriel de E. Si F est stable par f, alors $F^\perp$ est aussi stable par f.

Démonstration:
On suppose, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\langle f(\vec{u}) \mid f(\vec{v}-\rangle = \langle \vec{u} \mid \vec{v}\rangle$, et pour tout vecteur $\vec{x} \in F$, $f(\vec{x}) \in F$. Soit $\vec{x} \in F^\perp$. Soit $\vec{y}_0 \in F$. Comme f est bijective, il existe $\vec{y} \in F$ tel que $f(\vec{y}_0) = \vec{y}$. Ainsi $\langle f(\vec{x}) \mid \vec{y}_0\rangle = \langle f(\vec{x}) \mid f(\vec{y})\rangle = \langle \vec{x} | \vec{y}\rangle = 0$. D'où, $f(\vec{x}) \perp \vec{y}_0$. Ainsi, $f(\vec{x}) \in F^\perp$, d'où $F^\perp$ est stable par f.

Proposition 19:
Un sous-espace vectoriel F de E est stable par f si, et seulement si, $F^\perp$ est stable par $f^\star$.

Démonstration: $\implies$ On suppose, pour tout $\vec{x} \in F$, $f(\vec{x}) \in F$. Soit $\vec{y} \in F^\perp$, et soit $\vec{x} \in F$. Par définition de l'adjoint, $\langle f^\star(\vec{y}) \mid \vec{x}\rangle = \langle \vec{y} \mid f(\vec{x})\rangle$. Or, $f(\vec{x}) \in F$ par hypothèse, et $\vec{y} \in F^\perp$. D'où $f^\star(\vec{y}) \perp \vec{x}$, et donc $f^\star(\vec{y}) \in F^\perp$.

$\impliedby$ On applique le cas précédent avec $G = F^\perp$, et $g = f^\star$. En effet, $G^\perp = F^{\perp\perp} = F$, car E de dimension fini, et $g^\star = f^{\star\star} = f$.

5 Le théorème spectral

Lemme 20:
Soit $f : E \to E$ un endomorphisme autoadjoint.

1. Les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux. Autrement dit, si deux vecteurs propres sont associés à des valeurs propres distinctes, alors ils sont orthogonaux.
2. Les valeurs propres de f sont toutes réelles $\mathrm{Sp}_\mathbb{C}(f) \subset \mathbb{R}$.

Ce lemme reste valide en replaçant l'endomorphisme autoadjoint f par la matrice réelle symétrique A.

⚠ Attention, E doit être un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ; la matrice A doit être à coefficients réels. Sinon, les résultats du cours ne s'appliquent pas.

Démonstration:
On suppose f autoadjoint (H) : pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\langle f(\vec{u}) \mid \vec{v}\rangle = \langle \vec{u} \mid f(\vec{v})\rangle$. Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ et $f(\vec{v}) = \mu\vec{v}$ avec $\lambda \neq \mu$. Montrons $u \perp v$.

$$\begin{aligned} \langle f(\vec{u}) \mid \vec{v}\rangle &= \langle \lambda\vec{u} \mid \vec{v}\rangle = \lambda \langle \vec{u} \mid \vec{v}\rangle \\ \overset{\text{(H)}}{=} \langle \vec{u} \mid f(\vec{v})\rangle &= \langle \vec{u} \mid \mu\vec{v}\rangle = \mu \langle \vec{u} \mid \vec{v}\rangle . \end{aligned}$$

D'où, par différence $(\lambda - \mu) \langle \vec{u} \mid \vec{v}\rangle = 0$. Comme $\lambda \neq \mu$, on en conclut que $\langle \vec{u} \mid \vec{v}\rangle = 0$ d'où $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Pour montrer 2., on utilise les matrices : dans une base $\mathscr{B}$ orthonormée de E, soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ la matrice de f dans $\mathscr{B}$. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé de A, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ sa valeur propre (complexe) associée. Ainsi, $X \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$, et $A \cdot X = \lambda X$. Montrons $\lambda = \bar{\lambda}$. On calcule $\bar{X}^\top \cdot (A \cdot X) = \bar{X}^\top \cdot \lambda X = \lambda \bar{X}^\top \cdot X$ Or,

$$\bar{X}^\top \cdot X = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \dots & \bar{z}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2 .$$

C'est un réel strictement positif (en effet, s'il était nul, X serait nul). Autre calcul,

$$\begin{aligned}\bar{X}^\top \cdot A \cdot X = \left(\bar{X}^\top \cdot A \cdot X\right)^\top \\ &= X^\top \cdot A^\top \cdot (\bar{X}^\top)^\top \\ &= X^\top \cdot A \cdot \bar{X} \text{ car } A \in \underline{\mathcal{S}_n}(\mathbb{R}) \\ &= \overline{\bar{X}^\top \cdot \bar{A} \cdot X} \\ &= \overline{\bar{X}^\top \cdot A \cdot X} \text{ car } A \in \mathcal{S}_n(\underline{\mathbb{R}})\end{aligned}$$

D'où, $\bar{X}^\top \cdot A \cdot X \in \mathbb{R}$. Mais, $\bar{X}^\top \cdot A \cdot X = \lambda\left(|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2\right)$. Comme $\left(|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2\right) \neq 0$, d'où $\lambda \in \mathbb{R}$.

> Théorème 21 (Théorème spéctral – endomorphismes):
> Un endomorphisme f d'un espace euclidien E est autoadjoint si, et seulement s'il est diagonalisable dans une base orthonormée. Autrement dit, si, et seulement s'il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f. Ou encore, si, et seulement si E est la somme orthogonale des sous-espaces propres de f.

Démonstration (Par récurrence sur $n = \dim E$):

Initialisation Pour $n = 1$, soit $\vec{v} \in E$ un vecteur non nul, alors la base $\left(\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)$ convient.

Hérédité Soit $n \geqslant 1$. On suppose le théorème vrai en dimension n. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E de dimension $n+1$. Soit $\chi_f(X)$ le polynôme caractéristique de f. Il est de degré $n+1$, il a donc au moins une racine complexe λ. D'où, l'endomorphisme f a au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. D'après le lemme précédent, on sait maintenant que $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe $\vec{u} \in E$ un vecteur non nul tel que $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$. La droite $\text{Vect}(\vec{u})$ est stable par f. Par stabilité de l'orthogonal, $\text{Vect}(\vec{u})^\perp$ est aussi stable par f. Or, on a $\dim[\text{Vect}\,\vec{u}]^\perp = n$. On s'intéresse alors à l'endomorphisme induit à $\text{Vect}(\vec{u})^\perp : f|_{\text{Vect}(\vec{u})^\perp} = g$. Or, pour tous vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de $\text{Vect}(\vec{u})^\perp$, $\langle g(\vec{x}) \mid \vec{y}\rangle = \langle f(\vec{x}) \mid \vec{y}\rangle = \langle \vec{x} \mid f(\vec{y})\rangle = \langle \vec{x} \mid g(\vec{y})\rangle$. D'où, l'endomorphisme g est autoadjoint, on applique l'hypothèse de récurrence ($i.e.$ le théorème spectral) à g. Ainsi, $\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_n\right)$ est une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f, où $(\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_n)$ est une base orthonormée de $\text{Vect}(\vec{u})^\perp$ formée de vecteurs propres de f.

Le théorème spectral est donc vrai pour tout espace vectoriel de dimension finie n.

> Corollaire 22 (Théorème spéctral – matrices):
> Si une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique réelle, alors il existe une matrice orthogonale $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1} \cdot A \cdot P = P^\top \cdot A \cdot P$ est diagonale. Autrement dit, toute matrice symétrique réelle est orthogonalement diagonalisable :
>
> $$A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \qquad \Longrightarrow \qquad \exists P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\ P^{-1} \cdot A \cdot P \text{ diagonale.}$$

Démonstration:
Soit f l'endomorphisme représenté par A dans une base orthonormée $\mathcal{B}$. La matrice A étant symétrique, d'où l'endomorphisme f est autoadjoint. On applique le théorème précédent à f : soit $\mathcal{B}'$ une base orthonormée dans laquelle f est diagonal. Soit alors P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: la matrice $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ est diagonale, et la matrice P est orthogonale car c'est la matrice de passage d'une base orthonormée $\mathcal{B}$ vers une autre base orthonormée $\mathcal{B}'$.

> Définition 23:
> On dit d'un endomorphisme autoadjoint $f \in \mathcal{S}(E)$ qu'il est :
>
> 1. *positif* si $\forall \vec{x} \in E$, $\langle \vec{x} \mid f(\vec{x})\rangle \geqslant 0$;
> 2. *défini positif* s'il est positif, et que $\forall \vec{x} \in E$, si $\langle \vec{x} \mid f(\vec{x})\rangle = 0$, alors $\vec{x} = \vec{0}$. Autrement dit, si
> $$\forall \vec{x} \in E \setminus \{\vec{0}\}, \quad \langle \vec{x} \mid f(\vec{x})\rangle > 0.$$
>
> De même, on dit d'une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, qu'elle est :
>
> 1. *positive* si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top \cdot M \cdot X \geqslant 0$;
> 2. *définie positive* si elle est positive, et que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, si $X^\top \cdot M \cdot X = 0$, alors

$X = 0$. Autrement dit, si

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}, \quad X^\top \cdot M \cdot X > 0.$$

On note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs, et $\mathcal{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs De même, on note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives, et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

Théorème 24:
Un endomorphisme autoadjoint est :

1. positif, si, et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives ;
2. défini positif si, et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Ainsi, on a

$$\begin{array}{rcccl} f \in \mathcal{S}^+(E) & \iff & f \in \mathcal{S}(E) & \text{et} & \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}^+, \\ f \in \mathcal{S}^{++}(E) & \iff & f \in \mathcal{S}(E) & \text{et} & \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}^+_*, \\ M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) & \iff & M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) & \text{et} & \mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}^+, \\ M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \iff & M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) & \text{et} & \mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}^+_*. \end{array}$$

Tarte à la *double* crème

Démonstration: 1. “ $\Longrightarrow$ ” On suppose $f \in \mathcal{S}^+$, *i.e.* pour tout vecteur $\vec{x}$, $\langle \vec{x} \mid f(\vec{x}) \rangle \geqslant 0$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$: il existe un vecteur $\vec{u}$ non nul tel que $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$. D'où, par hypothèse,

$$0 \leqslant \langle \vec{u} \mid f(\vec{u}) \rangle = \langle \vec{u} \mid \lambda \vec{u} \rangle = \lambda \langle \vec{u} \mid \vec{u} \rangle .$$

Or, $\langle \vec{u} \mid \vec{u} \rangle > 0$. D'où, $\lambda \geqslant 0$.

“ $\Longleftarrow$ ” Supposons $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$ et $f \in \mathcal{S}(E)$. On veut montrer que $f \in \mathcal{S}^+(E)$, *i.e.* pour tout vecteur $\vec{x}$, $\langle \vec{x} \mid f(\vec{x}) \rangle \geqslant 0$. On se place dans une base adaptée, grâce à la seconde hypothèse. En effet, d'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E formée de vecteurs propres de f. On pose $\mathscr{B} = (\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$, cette base. Soit $\vec{x} \in E$: on pose $\vec{x} = x_1 \vec{\varepsilon}_1 + x_n \vec{\varepsilon}_2 + \cdots + x_n \vec{\varepsilon}_n$. Ainsi,

$$f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{\varepsilon}_1) + x_2 f(\vec{\varepsilon}_2) + \cdots + x_n f(\vec{\varepsilon}_n) = x_1 \lambda_1 \vec{\varepsilon}_1 + x_2 \lambda_2 \vec{\varepsilon}_2 + \cdots + x_n \lambda_n \vec{\varepsilon}_n.$$

D'où,$\langle \vec{x} \mid f(\vec{x}) \rangle = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$. Or, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$ par hypothèse. D'où $\langle \vec{x} \mid f(\vec{x}) \rangle \geqslant 0$.

2. “ $\Longrightarrow$ ” On suppose $f \in \mathcal{S}^{++}$, *i.e.* pour tout vecteur $\vec{x}$, $\langle \vec{x} \mid f(\vec{x}) \rangle > 0$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$: il existe un vecteur $\vec{u}$ non nul tel que $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$. D'où, par hypothèse,

$$0 < \langle \vec{u} \mid f(\vec{u}) \rangle = \langle \vec{u} \mid \lambda \vec{u} \rangle = \lambda \langle \vec{u} \mid \vec{u} \rangle .$$

Or, $\langle \vec{u} \mid \vec{u} \rangle > 0$. D'où, $\lambda > 0$.

“ $\Longleftarrow$ ” Supposons $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$ et $f \in \mathcal{S}(E)$. On veut montrer que $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$, *i.e.* pour tout vecteur $\vec{x}$ non nul, $\langle \vec{x} \mid f(\vec{x}) \rangle > 0$. On se place dans une base adaptée, grâce à la seconde hypothèse. En effet, d'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E formée de vecteurs propres de f. On pose $\mathscr{B} = (\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$, cette base. Soit $\vec{x} \in E$ un vecteur non nul : on pose $\vec{x} = x_1 \vec{\varepsilon}_1 + x_n \vec{\varepsilon}_2 + \cdots + x_n \vec{\varepsilon}_n$. Ainsi,

$$f(\vec{x}) = x_1 f(\vec{\varepsilon}_1) + x_2 f(\vec{\varepsilon}_2) + \cdots + x_n f(\vec{\varepsilon}_n) = x_1 \lambda_1 \vec{\varepsilon}_1 + x_2 \lambda_2 \vec{\varepsilon}_2 + \cdots + x_n \lambda_n \vec{\varepsilon}_n.$$

D'où,$\langle \vec{x} \mid f(\vec{x}) \rangle = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$. Or, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i > 0$ par hypothèse, et il existe $i \in [\![1, n]\!]$, tel que $x_i \neq 0$ car $\vec{x} \neq \vec{0}$. D'où $\langle \vec{x} \mid f(\vec{x}) \rangle > 0$.

6 Rotations et réflexions

Définition 25:
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On dit que deux bases $\mathscr{B}_0$ et $\mathscr{B}$ de E ont la même *orientation* si le déterminant de la matrice P de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}$ est positif :

$$\det P = \det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) > 0.$$

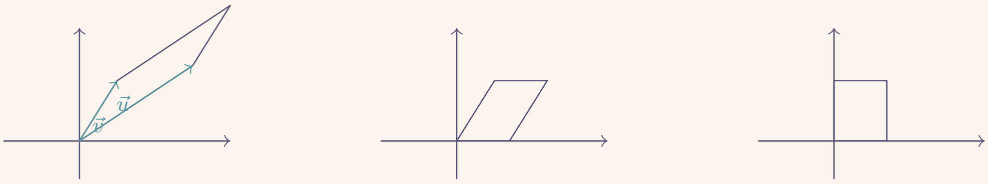

Figure 3 – Aire d'un parallélogramme

Exemple 26:
On oriente le plan $\mathbb{R}^2$ en décidant que la base canonique $\mathscr{B}_0 = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est directe, puis on munit $\mathbb{R}^2$ du produit canonique : $\mathscr{B}_0$ est alors une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$. Soient deux vecteurs $\vec{u} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$ et $\vec{v} = c\,\vec{\imath} + b\,\vec{\jmath}$. Le déterminant

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

possède

— un signe (s'il est strictement positif, alors $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base directe, s'il est strictement négatif, alors $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base indirecte, s'il est nul alors $(\vec{u}, \vec{v})$ n'est pas une base car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont liés) ;

— une valeur absolue, égale à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Les trois parallélogrammes de la figure précédente ont la même aire :
$$\left|\det(\vec{u}, \vec{v})\right| = |ad - bc|.$$

Exemple 27:
On oriente l'espace $\mathbb{R}^3$ en décidant que la base canonique $\mathscr{B}_0 = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est directe.

Définition 28:
Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. On dit que

— f est une *rotation* si f est une isométrie de déterminant $+1$, autrement dit, si $\left[\, f \,\right]_{\mathscr{B}} \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$;

— f est une *réflexion* si f est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E.

Remarque 29:

1. D'après la définition et les théorèmes précédents, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} f \text{ est une rotation } &\iff f \text{ est une isométrie et } \det f = +1 \\ &\iff f \in \mathrm{O}(E) \text{ et } \det f = +1 \\ &\iff f \text{ conserve } \begin{cases} \text{le produit scalaire} \\ \text{et l'orientation} \end{cases} \\ &\iff f \text{ transforme une base orthonormée directe} \\ &\qquad\quad \text{en une base orthonormée directe.} \end{aligned}$$

2. Les rotations de E forment un groupe, noté $\mathrm{SO}(E)$; c'est un sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$ des isométries de E.
3. Si f est une réflexion par rapport à un hyperplan H de E, alors sa matrice dans une base adaptée à la somme directe $H \oplus H^{\perp}$ s'écrit
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Ainsi, le déterminant d'une réflexion est donc toujours égal à -1. Et, la composée de deux réflexions est donc une rotation.

Théorème 30:
Une matrice appartient à $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ si, et seulement si elle est de la forme

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Son déterminant vaut $+1$ dans le premier cas, -1 dans le second.

La première matrice représente une rotation d'angle θ ; la seconde représente une symétrie par rapport à la droite d'angle $\theta/2$.

Démonstration: “ $\Longrightarrow$ ” Les colonnes des deux matrices forment une base de $\mathbb{R}^2$. D'où, $R_\theta \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ et $S_\theta \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$.

“ $\Longleftarrow$ ” La matrice A est dans le groupe $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, d'où

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 & (1) \\ c^2 + d^2 = 1 & (2) \\ ac + bd = 0. & (3) \end{cases}$$

Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $(a, b) = (\cos\theta, \sin\theta)$, d'après (1). De même, il existe $\varphi \in \mathbb{R}$, tel que $(c, d) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, d'après (2).

$$\begin{aligned}
(3) \text{ d'où } & ab + cd = 0 \\
\text{d'où } & \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi = 0 \\
\text{d'où } & \cos(\theta - \varphi) = 0 \\
\text{d'où } & \theta - \varphi \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi] \\
\text{d'où } & \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta - \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \text{ ou bien} \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta - \varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \\
\text{d'où } & \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \varphi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ ou bien} \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \varphi - \frac{\pi}{2} + 2k\pi. \end{cases} \\
\text{d'où } & \begin{cases} A = R_\theta \\ \text{ ou bien} \\ A = S_\theta \end{cases}
\end{aligned}$$

Corollaire 31:
Les isométries du plan sont les rotations (autour de l'origine) et les réflexions (par rapport à une droite passant par l'origine).

Remarque 32:
Pour tout $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$, $R_\theta \cdot R_\varphi = R_{\theta+\varphi} = R_\varphi \cdot R_\theta$. Le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est donc commutatif. De plus, l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \\ \theta &\longmapsto R_\theta \\ \varphi &\longmapsto R_\varphi \\ \theta + \varphi &\longmapsto R_{\theta+\varphi} \end{aligned}$$

est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ vers le groupe $(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), \cdot\,)$. Ce morphisme est surjectif, mais pas injectif (car son noyau est $2\pi\,\mathbb{Z}$) : $\Phi(0) = \Phi(2\pi) = I_2$.

De plus, au lieu de repérer un point du plan par ses coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on peut le repérer par son affixe $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

(a) Après une rotation, la position du point M' sera repérée par les coordonnées

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S_\theta \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad z' = \mathrm{e}^{i\theta} \cdot z.$$

En effet, $z' = \mathrm{e}^{i\theta} \cdot z \iff x' + iy' = (\cos\theta + i\sin\theta)(x + iy) = (x\cos\theta - y\sin\theta) + i(x\sin\theta + y\cos\theta)$, et

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_\theta \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'application

$$\begin{aligned}\Psi : \mathbb{U} &\longrightarrow \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})\\ \mathrm{e}^{i\theta} &\longmapsto R_\theta\end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes (*i.e.* un morphisme de groupe bijectif).

(b) Après une symétrie, la position du point M' sera repérée par les coordonnées

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R_\theta \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \iff \qquad z' = \mathrm{e}^{i\theta} \cdot \bar{z}.$$

En effet, $z' = \mathrm{e}^{i\theta} \cdot \bar{z} \iff x' + iy' = (\cos\theta + i\sin\theta)(x - iy) = (x\cos\theta + y\sin\theta) + i(x\sin\theta - y\cos\theta)$, et

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = S_\theta \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta + y\sin\theta \\ x\sin\theta - y\cos\theta \end{pmatrix}.$$

D'où,

$$S_\theta = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{R_\theta} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{S_0}.$$

Théorème 33:
Une application f est une isométrie de l'espace si, et seulement s'il existe un angle $\theta \in \mathbb{R}$ et une base orthonormée directe $\mathscr{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ tels que

$$[\,f\,]_{\mathscr{B}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} f(\vec{u}) & f(\vec{v}) & f(\vec{w}) \end{array} \end{array}$$

ou

$$[\,f\,]_{\mathscr{B}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} f(\vec{u}) & f(\vec{v}) & f(\vec{w}) \end{array} \end{array}.$$

Une isométrie f est, ou bien une rotation d'un angle θ autour de l'axe $\mathrm{Vect}(\vec{w})$, ou bien la composée d'une rotation d'angle θ autour de l'axe $\mathrm{Vect}(\vec{w})$ et d'une symétrie par rapport au plan $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$.

Démonstration (tarte à la crème):
Comme f est une isométrie, on a, pour tout vecteur $\vec{x} \in E$, $\|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$. Or, il existe un vecteur $\vec{x}$ non nul tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$, d'où $\|\lambda\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$, donc $|\lambda| \cdot \|\vec{x}\| = 1 \cdot \|\vec{x}\|$. On en déduit que $\lambda \in \{-1, 1\}$ car $\|\vec{x}\| \neq 0$. La suite de la démonstration est dans le poly.

Théorème 34:
Soit E un espace euclidien, et soit f une isométrie : E est la somme directe et orthogonale de $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - f)$, de $\mathrm{Ker}(-\mathrm{id}_E - f)$, et/ou de plans P_i stables par f sur lesquels f induit une rotation.

Corollaire 35:
Si f est une isométrie d'un espace euclidien E, alors il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, des réels

$\theta_1, \ldots, \theta_k$, et une base $\mathscr{B}$ orthonormée de E tels que

$$[\,f\,]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & R_{\theta_k} & & \\ & & & I_p & \\ (0) & & & & -I_q \end{pmatrix}.$$