Chapitre 10

Série

Hugo Salou MPI*
Dernière mise à jour le 5 janvier 2023

Table des matières

Première partie

Cours

On rappelle qu'il existe des séries numériques $\sum u_n$, des séries de fonctions $\sum f_n$ (à ne pas confondre avec la série numérique $\sum f_n(x)$). Dans ce chapitre, on s'intéresse à un cas particulier de séries de fonctions, celles de la forme $\sum a_n x^n$ (qui est un abus de langage, il ne s'agit pas d'une série numérique malgré son apparence). Ainsi, la somme des termes de cette série est de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 x^0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots .$$

Si, à partir d'un certain rang, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle, alors il s'agit d'un polynôme. Une série entière est une généralisation des polynômes. Toute troncature de la somme des termes d'une série entière est un développement limité.

Définition 1:
Une série de fonctions $\sum f_n$ est appelée *série entière* s'il existe une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = a_n\, x^n.$$

Somme	Rayon de convergence
$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$	1
$\dfrac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, x^k$	1
$\dfrac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k$	1
$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^k}{k}$	1
$\operatorname{Arctan} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}$	1
$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$	∞
$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$	∞
$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	∞
$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$	∞
$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	∞
$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)\right) \dfrac{x^k}{k!}$	1

Table 1 – Séries entières usuelles

Exercice 2:
On admet les formules de la table précédente. On applique la formule de la dernière ligne dans le cas $\alpha = -1/2$:

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1,1[, \quad & \frac{1}{\sqrt{1-x}} \\
&= 1 + \alpha(-x) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}(-x)^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}(-x)^n + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}+1)\cdots(\frac{1}{2}+n-1)}{n!} x^n \\
&= 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n \times n!} x^n \\
&= 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) \times 2n}{2^n \times n! \times 2 \times 4 \times \cdots \times (2n-2) \times 2n} x^n \\
&= 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n! \times 2^n \times 2^n (n!)} x^n \\
&= 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{4^n}.
\end{aligned}$$

1 Rayon de convergence

Lemme 3 (d'Abel):
Soit un réel $x_0 > 0$. Si la suite $(a_n x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors la série $\sum a_n x^n$ converge absolument pour tout réel $x \in]-x_0, x_0[$.

Démonstration:
On veut montrer que si la suite $(a_n x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors, pour $x \in]-x_0, x_0[$, la série numérique $\sum a_n x^n$ converge absolument. On suppose la suite $(a_n x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée. Ainsi, il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n x_0^n| \leqslant M$. Ce lemme est vrai si $x_0 = 0$; on suppose à présent $x_0 \neq 0$. Alors,

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n} \right| \leqslant M \times \left| \frac{x}{x_0} \right|^n.$$

Or, la série $\sum M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n = M \sum \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ converge si $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$. Donc, si $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, alors la série $\sum |a_n x^n|$ converge.

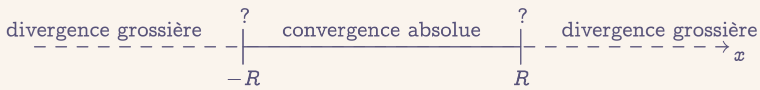

Figure 1 – Rayon de convergence – convergence absolue et divergence grossière

Proposition – Définition 4:
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. Il existe un unique $R \in \bar{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que

- si $|x| < R$, alors la série $\sum a_n x^n$ converge absolument ;
- si $|x| > R$, alors la série $\sum a_n x^n$ diverge grossièrement ;

Le réel R est appelé *rayon de convergence* de la série entière. Il vaut

$$R = \sup\{\, r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n) \text{ bornée} \,\}.$$

Démonstration:
Soit $x \in \mathbb{R}$.

1^ER^ CAS $|x| < R$. Soit $x_0 = (|x| + R)/2 < R$. Alors, la suite $(a_n x_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. D'où, d'après le lemme d'ABEL, la série numérique $\sum a_n x^n$ converge absolument.

2^ND^ CAS $|x| > R$. Alors, la suite $(a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est plus bornée. D'où la suite $(a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente, et ne tend pas vers 0. On en déduit que la série numérique $\sum a_n x^n$ diverge grossièrement.

REMARQUE 5:
On a

$$\begin{aligned} R &= \sup\{\, r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée} \,\} \text{ par définition} \\ &= \sup\{\, r \in \mathbb{R}^+ \mid \textstyle\sum a_n r^n \text{ converge} \,\} \text{ par le théorème 4} \\ &= \sup\{\, r \in \mathbb{R}^+ \mid \textstyle\sum |a_n r^n| \text{ converge} \,\} \text{ par le théorème 4} \\ &= \sup\{\, r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers } 0 \,\} \end{aligned}$$

EXEMPLE 6 ($R = +\infty$):
On considère la série $\sum \frac{x^n}{n!}$. *Calculons son rayon de convergence.* Soit $u_n = \left|\frac{x^n}{n!}\right|$. Si $x = 0$, la série $\sum u_n$ converge vers 1. On suppose $x \neq 0$. On calcule

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

D'où, d'après le critère de D'ALEMBERT, la série $\sum u_n$ converge. On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum a_n x^n$ converge, *i.e.* son rayon de convergence vaut $R = +\infty$.

EXEMPLE 7 ($R = 0$):
On considère la série $\sum n^n x^n$. *Calculons son rayon de convergence.* Si $x = 0$, la série converge vers 1. On suppose maintenant $x \neq 0$. Alors, à partir d'un certain rang, $|nx| \geqslant 7$. Or, la somme $\sum 7^n$ diverge grossièrement. D'où, la série $\sum |nx|^n$ diverge aussi. Comme la série $\sum (nx)^n$ ne converge pas absolument, on en déduit que la série $\sum n^n x^n$ ne converge absolument que si $x = 0$. On en déduit que $R = 0$.

EXEMPLE 8 ($R \in]0, +\infty[$, et diverge aux deux bords):
On considère la série $\sum x^n$. *Calculons son rayon de convergence.* Il s'agit d'une série géométrique, mais il s'agit aussi d'une série entière, où $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1$. Or, on sait que

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \quad \text{qui converge si et seulement si } |x| < 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \quad \text{qui diverge.} \end{cases}$$

Donc, la série $\sum x^n$ converge si et seulement si $|x| < 1$. On en déduit que $R = 1$.

EXEMPLE 9 ($R \in]0, +\infty[$, et diverge d'un bord, converge de l'autre):
On considère la série $\sum \frac{x^n}{n}$. Si $x = 1$, alors la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge par critère de RIEMANN. Si $x \neq -1$, alors la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge d'après le théorème des séries alternées car $\left(\frac{1}{n}\right)^*_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant. Cette situation dissymétrique nous montre que $R = 1$.

EXEMPLE 10 ($R \in]0, +\infty[$, et converge aux deux bords):
On considère la série $\sum \frac{x^n}{n^2}$. *Calculons son rayon de convergence.*

— Si $x = 1$, la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge par critère de RIEMANN. D'où $R \geqslant 1$.
— Si $|x| > 1$, alors

$$\frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right|}{\left|\frac{x^n}{n^2}\right|} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \times |x| \xrightarrow[n\to\infty]{} |x|.$$

D'où, d'après le critère de D'ALEMBERT, la série $\sum \frac{|x|^n}{n}$ diverge. D'où $R \leqslant 1$.

On en déduit que $R = 1$.

Autre méthode :
— Si $|x| > 1$, alors $\frac{x^n}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ par croissances comparées. D'où $R \leqslant 1$.
— Si $|x| < 1$, alors $\frac{|x|^n}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. D'où $R \geqslant 1$.

Proposition 11:
Soient R_a et R_b les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ respectivement.

1. Si, à partir d'un certain rang, $|a_n| \leqslant |b_n|$, alors $R_a \geqslant R_b$.
2. Si $a_n = \mathcal{O}_{n\to\infty}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.
3. Si $a_n \sim_{n\to\infty} b_n$, alors $R_a = R_b$.

Démonstration: 1. Ainsi, à partir d'un certain rang, $|a_n x^n| \leqslant |b_n x^n|$. D'où, si la série $\sum |b_n x^n|$ converge, alors la série $\sum |a_n x^n|$ converge. On a donc $R_b \leqslant R_a$.
2. Ainsi, $a_n = b_n \times u_n$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée. Il existe donc $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|u_n| \leqslant M$. D'où, $|a_n| = |b_n| \times |u_n| \leqslant M\,|b_n|$. Donc, $R_a \geqslant R'$ où R' est le rayon de convergence de la série $\sum M b_n x^n = M \sum b_n x^n$. On en déduit que $R_a \geqslant R_b$.
3. Ainsi, $a_n = \mathcal{O}(b_n)$ et $b_n = \mathcal{O}(a_n)$, d'où d'après le cas précédent, $R_a \geqslant R_b$, et $R_b \geqslant R_a$. On en déduit que $R_a = R_b$.

Exercice 12: 1. On considère la série entière $\sum \mathrm{e}^{\cos n} x^n$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \mathrm{e}^{-1} \leqslant a_n = \mathrm{e}^{\cos n} \leqslant \mathrm{e}^1$ car $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$ et exp est croissante. D'une part, $|a_n| \leqslant |\mathrm{e}^1|$, d'où R_a est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série $\sum \mathrm{e}^1 x^n = \mathrm{e} \sum x^n$. D'où $R_a \geqslant 1$. D'autre part, $R_a \leqslant 1$ de même. On en déduit que $R_a = 1$.
2. On considère la série entière $\sum \frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}} x^n$, de terme général u_n.
   (a) Méthode 1 (d'Alembert).
   $$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = |x| \times \frac{n+1}{4\sqrt{(2n+2)(2n+1)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{8}|x|.$$
   Alors, la série $\sum u_n$ diverge si $|x|/8 > 1$; et, la série $\sum u_n$ converge si $|x| < 1$, par le critère de d'Alembert. On en déduit que $R = 8$.
   (b) Méthode 2 (Stirling)... à tenter

2 Convergence normale et continuité

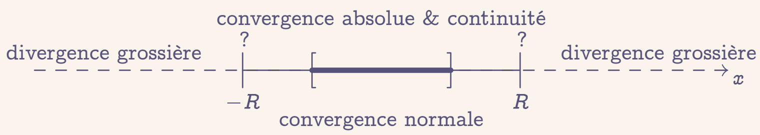

Figure 2 – Convergence normale d'une série entière

Théorème 13: 1. La série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement (donc uniformément) sur tout segment inclus dans $]-R, R[$. Mais, la convergence normale étant une propriété globale, on ne peut pas « faire sauter la barrière. »
2. La somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est une fonction continue sur $]-R, R[$.

Théorème 14 (Abel radial):
Si la série numérique $\sum a_n R^n$ converge, alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \xrightarrow[x\to R^-]{} \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

3 Intégrer

Théorème 15:
Soit R le rayon de convergence d'une série entière.

1. Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est aussi égal à R.

2.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\Big)\, \mathrm{d}t.$$

« On peut intégrer terme à terme sans changer son rayon de convergence. »

Exemple 16:

Exercice 17:

4 Dériver

Théorème 18:
Avec les notations précédentes,

1. le rayon de convergence de la série entière $\sum n a_n x^{n-1}$ est aussi égal à R,
2. pour $x \in \,]-R, R[$,
$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$
3. la somme
$$\begin{aligned} f : \,]-R, R[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{aligned}$$
est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

« On peut dériver terme à terme sans changer son rayon de convergence. »

Exercice 19:
On considère la série entière $\sum \frac{n+5}{(n+2)(n+2)} x^n$. *Calculons son rayon de convergence.*

Idée : On intègre terme à terme la série entière $\sum x^n$, et on obtient la série entière $\sum \frac{x^{n+1}}{n+1}$. On ré-intègre la série : $\sum \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$. On multiplie par x^3, et on obtient la série entière $\sum \frac{x^{n+5}}{(n+1)(n+2)}$, que l'on peut dériver terme à terme pour obtenir la série entière $\sum \frac{n+5}{(n+1)(n+2)} x^{n+4}$. On divise[1] par x^4 pour trouver la série demandée : $\sum \frac{(n+5)}{(n+1)(n+2)} x^n$. Cette méthode fonctionne car on peut intégrer/dériver sans changer son rayon de convergence. Le rayon de convergence de la série $\sum x^n$ est $R = 1$, donc le rayon de convergence de la série $\sum \frac{n+5}{(n+1)(n+2)} x^n$ est $R = 1$.

« Mieux vaut intégrer le plus tôt possible pour déterminer le rayon de convergence »

Rédaction : On a $\forall x \in \,]-1, 1[$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, d'où en intégrant, $\forall x \in \,]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\ln(1-x)$. D'où, en intégrant,

$$\begin{aligned} \forall x \in \,]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} &= -\int_0^x 1 \times \ln(1-t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\big[t\ln(1-t)\big] - \int_0^x \frac{t}{1-t}\,\mathrm{d}t \\ &= x\ln(1-x) - \int_0^x \left[-1 + \frac{1}{1-t}\right]\mathrm{d}t \\ &= -x\ln(1-x) - \big[-x - \ln(1-x)\big] \\ &= (1-x)\ln(1-x) + x. \end{aligned}$$

1. On suppose dans ce cas $x \neq 0$, et on s'occupera du cas $x = 0$ à part.

De même pour les autres étapes du raisonnement.

<u>Autre méthode</u> : on a $\frac{n+5}{(n+1)(n+2)} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ d'où, les séries entières $\sum \frac{(n+5)}{(n+1)(n+2)}x^n$, et $\sum \frac{x^n}{n}$ ont le même rayon de convergence, qui vaut $R = 1$.[2]

Exemple 20 (séries entières & équations différentielles):

1. On pose

$$\begin{aligned}\exp : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.\end{aligned}$$

En dérivant terme à terme, et on retrouve bien $x \mapsto \exp(x)$, et son rayon de convergence est le même. On a donc montré que exp est *une* solution de $y' = y$. De plus, la fonction $x \mapsto K\,\mathrm{e}^x$ est aussi une solution de cette équation différentielle. Montrons, avec la méthode de la variation de la constante, que ces fonctions sont les seules solutions de $y' = y$. On pose $y(x) = k(x)\mathrm{e}^k$, et on a

$$\begin{aligned} y'(x) = y(x) &\iff k'(x)\mathrm{e}^x + \cancel{k(x)\mathrm{e}^x} = \cancel{k(x)\mathrm{e}^x}\\ &\iff k'(x)\,\mathrm{e}^x = 0\\ &\iff k'(x) = 0\\ &\iff \exists K \in \mathbb{R},\ k(x) = K.\end{aligned}$$

D'où, la solution générale de l'équation $y' = y$ est : $\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = K\mathrm{e}^x$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la série entière $\sum a_n x^n$ où

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \text{ si } n > 0.$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini comme $u_n = |a_n x^n|$, et on calcule, si $\alpha \notin \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} \times \frac{x^{n+1}}{x^n}\right|\\ &= |x| \times \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}\right| \times \frac{n!}{(n+1)!}\\ &= \frac{|\alpha - n|}{n+1}\,|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|\end{aligned}$$

D'après le critère de d'Alembert, si $|x| > 1$, alors la série diverge, et si $|x| < 1$, alors la série converge. On en déduit que $R = 1$. Soit, pour tout $x \in\ ]-1,1[$, $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. On peut dériver terme à terme sans changer le rayon de convergence. D'où

$$\forall x \in\ ]-1,1[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1}.$$

Montrons que f est solution de l'équation $\alpha y - (1+x)y' = 0$:

$$\begin{aligned}\alpha\, f(x) - (1+x)\, f'(x) &= \alpha\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\Big) - (1+x)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\\ &= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} x^n(\alpha a_n - n a_n) - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\\ &= \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n a_n(\alpha - n) - n a_n x^{n-1}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

2. Il s'agit de la série entière convergent vers $\ln(1-x)$.

En effet, $(n+1)a_{n+1} = (\alpha - n)a_n$, par construction de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et

$$\alpha + \sum_{n=1}^{N} \left(x^n (n+1)a_{n+1} - x^{n+1} n a_n\right) = \alpha - \alpha + x^N (N+1) a_{N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

D'où, f est solution de l'équation différentielle $\alpha y - (1+x)y' = 0$. Or, $x \mapsto K(1+x)^\alpha$ est une solution de cette équation différentielle. On fait varier la constante : on pose, pour $x \in \left]-1,1\right[$, $y(x) = k(x)\,(1+x)^\alpha$

$$\begin{aligned}
&\alpha y(x) - (1+x)\,y'(x) - \alpha k(x)\,(1+x)^\alpha \\
&- (1+x)\big(k'(x)(1+x)^\alpha + \alpha\, k(x)(1+x)^{\alpha-1}\big) = 0 \\
\iff &\forall x \in \left]-1,1\right[,\ (1+x)^{\alpha+1} k'(x) = 0 \\
\iff &\forall x \in \left]-1,1\right[, k'(x) = 0 \\
\iff &\exists K \in \mathbb{R},\ k(x) = K \\
\iff &\exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in \left]-1,1\right[, f(x) = K(1+x)^\alpha
\end{aligned}$$

Or, $f(0) = 1$ et donc $K = 1$.

5 (Ne pas) être développable en série entière

Définition 21:
Soit $r \in \mathbb{R}_*^+ \cup \{+\infty\}$. On dit qu'une fonction f est *développable en série entière* sur $\left]-r,r\right[$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ qui a un rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que

$$\forall x \in \left]-r,r\right[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Exemple 22:
$\varnothing$

Remarque 23:
$\varnothing$

Exercice 24:

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$

1. Montrons que, pour $n \in \mathbb{N}$, f est $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}^*$, et il existe un polynôme P_n tel que $\forall x \neq 0$, $f^{(n)}(x) = P_n(x)\,\frac{1}{x^{3n}}\,\mathrm{e}^{-1/x^2}$.
   - Pour $n = 0$, alors $f^{(0)}(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2} = \frac{1}{x^{3\times 0}} \times \mathrm{e}^{-1/x^2}$, d'où $P_0(X) = 1$.
   - On suppose $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}\mathrm{e}^{-1/x^2}$. D'où $f^{(n)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(n)}(x) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[P_n(x)x^{-3n}\mathrm{e}^{-1/x^2}\right] \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[P_n(x)x^{-3n}\right] + P_n(x)x^{-3n} \times \frac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-1/x^2} \\
&= \left(P_n'(x)x^{-3n} - 3nP_n(x)x^{-3n-1} + 2P_n(x)x^{-3n-3}\right)\mathrm{e}^{-1/x^2} \\
&= \frac{x^3 P_n'(x) - 3nx^2 P_n(x) + 2P_n(x)}{x^{3n+3}}\mathrm{e}^{-1/x^2} \\
&= \frac{P_{n+1}(x)}{x^{3(n+1)}}\mathrm{e}^{-1/x^2}
\end{aligned}$$

2. Par récurrence :
   - $f^{(0)}(0) = f(0) = 0$ par définition, et $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 = f(0)$, donc f est $\mathcal{C}^0$.
   - On suppose f $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)}(0) = 0$. On sait que, $f^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ par hypothèse, $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car f est $\mathcal{C}^\infty$ d'après la question 1. Et,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(n)}(x) &= f^{(n+1)}(x)\\ &= \frac{P_{n+1}(x)}{x^{3n+3}}\mathrm{e}^{-1/x^2}\\ &\xrightarrow[x\to 0]{} 0 \text{ par croissances comparées.}\end{aligned}$$

3. f est $\mathcal{C}^\infty$ mais pas développable en série entière. Par l'absurde, si f est développable en série entière, alors $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$, d'où $\forall x,\ f(x) = 0$, ce qui est absurde.

Rappel (Théorème de la limite de la dérivée):
Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et

1. $\lim_{x\to a^+} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.
2. $\lim_{x\to a^+} f'(x) = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en a, et la courbe possède une tangente verticale.
3. $\lim_{x\to a^+} f'(x)$ n'existe pas, alors on ne peut pas conclure.

Proposition 25:
Une fonction f est développable en série entière sur $]-r, r[$ si, et seulement si

1. f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$
2. $\forall x \in\,]-r, r[,\ R_N(x) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ où $R_N(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

En effet, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_N(x),$$

ainsi $\sum_{n=0}^{N} f^n(0)/n! \xrightarrow[N\to\infty]{} f(x) \iff R_N(x) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.

Rappel (Formules de Taylor):
<u>Formule de Taylor-Young</u> : si f est de classe $\mathcal{C}^n$, alors

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + o(1)\\ &= f(0) + x\, f'(0) + o(x)\\ &= f(0) + x\, f'(0) + \frac{x^2}{2!}\, f''(0) + o(x^2)\\ &= f(0) + x\, f'(0) + \frac{x^2}{2!}\, f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}\, f^{(n)}(0) + o(x^n)\end{aligned}$$

<u>Formule de Taylor avec reste intégral[3]</u> : si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, alors

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= f(0) + x\, f'(0) + \int_0^x (x-t)\, f''(t)\,\mathrm{d}t\\ &= f(0) + x\, f'(0) + \frac{x^2}{2!}\, f''(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!}\, f'''(t)\,\mathrm{d}t\\ &= f(0) + x\, f'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}\, f^{(n)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

3. aussi appelé formule de Taylor-Laplace

Exercice 26: 1. Montrons que, pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \cos^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t$ car cos est $\mathcal{C}^{n+1}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$$\begin{aligned} 0 \leqslant |R_n(x)| &= \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \cos^{(n+1)}(t)\, \mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \left| \int_0^x \left| \frac{(x-t)^n}{n!} \cos^{(n+1)}(t) \right| \mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!}\, \mathrm{d}t \right| \end{aligned}$$

car $|\cos^{(n+1)}(t)| \leqslant 1$, $\forall t \in [0, x]$. D'où,

$$0 \leqslant |R_n(x)| \leqslant \left| \int_0^x \frac{x^n}{n!}\, \mathrm{d}t \right| = \frac{|x|^{n+1}}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

car on sait que la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge, donc le terme général tend donc vers 0. Donc cos est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

2. De même pour sin.

6 Produit de Cauchy et somme de deux séries entières

Rappel (produit de Cauchy):
On rappelle le produit de deux polynômes : on pose $A = \sum_{n=0}^{\deg A} a_n X^n$ et $B = \sum_{p=0}^{\deg B} b_p X^p$, le produit de ces deux polynômes est donc

$$\begin{aligned} A \times B &= \Big(\sum_{n=0}^{\deg A} a_n X^n \Big) \Big(\sum_{p=0}^{\deg B} b_p X^p \Big) \\ &= \sum_{k=0}^{\deg A + \deg B} c_k X^k \qquad \text{où } c_k = \sum_{n+p=k} a_n b_p. \end{aligned}$$

On définit alors le *produit de* Cauchy de deux séries : si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors $\sum w_n$ converge absolument, en posant $w_k = \sum_{n+p=k} u_n v_p$. De plus,

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \Big) \Big(\sum_{p=0}^{\infty} v_p \Big).$$

Proposition 27: 1. Soit $c_n = a_n + b_n$. Le rayon de convergence de la série $\sum c_n x^n$ vaut $R_c = \min(R_a, R_b)$ (ou plus sur $R_a = R_b$) et

$$\forall x \in \,]-R_c, R_c[, \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

2. Si $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ ont respectivement pour rayons de convergence R_a et R_b, alors $\sum c_n x^n$ a pour rayon de convergence $R_c \geqslant \min(R_a, R_b)$, où $c_k = \sum_{n+p=k} a_n + b_p$, et

$$\forall x \in \,]-R_c, R_c[, \; \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Big) \Big(\sum_{p=0}^{\infty} b_p x^p \Big) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

EXEMPLE 28: 1. La série $\sum x^n$ a pour rayon de convergence 1, et la série entière $1-x$ a pour rayon de convergence $+\infty$. Et, $\forall x\in\,]-1,1,[$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Le produit de CAUCHY des deux séries entières $\sum x^n = \sum a_k x^k$ et $1-x=\sum b_\ell x^\ell$ est la série $\sum c_n x^n$, où

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k+\ell=n} a_k b_\ell \\ &= \sum_{\ell=0}^{n} a_{n-\ell} b_\ell \end{aligned}$$

D'où, $c_0=1$, $c_1=1-1=0$ et $\forall n\geqslant 2$, $c_n=0$. Donc $\sum c_n x^n = 1$, qui a pour rayon de convergence $+\infty \neq \min(R_a,R_b)$. On retrouve ce résultat car

$$\underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\sum_{n=0}^{\infty} x^n} \times (1-x) = 1.$$

2. (tarte à la crème) La série entière $\sum H_n x^n$, [4] est le produit de CAUCHY des deux séries entières $\sum \frac{x^n}{n}$ et $\sum x^n$. En effet,

$$c_n x^n = \sum_{k+\ell=n} \frac{x^k}{k} x^\ell = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} x^n = H_n x^n.$$

Or, $R_c \geqslant \min(R_a,R_b) = \min(1,1)=1$. D'où,

$$\forall x\in\,]-1,1[,\ \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n$$

et donc

$$-\ln(1-x)\times\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n.$$

EXERCICE 29 (tarte à la crème):
Soient $x,y\in\mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^y=\mathrm{e}^{x+y}$. On sait que $\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. On veut montrer que $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^k}{k!}$. Le rayon de convergence de la série exp est $+\infty$, le rayon de convergence du produit de CAUCHY de deux séries exp est supérieur à $\min(+\infty,+\infty)$, *i.e.* il faut $+\infty$. Le produit de CAUCHY de ces deux séries est la série $\sum w_k$ avec

$$\begin{aligned} w_k = \sum_{n+p=k} u_n v_p = \sum_{n+p=k} \frac{x^n}{n!}\frac{y^p}{p!} &= \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n\,y^{k-n}}{n!\,(k-n)!} \\ &= \frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{k}\frac{k!}{n!\,(n-k)!}x^n y^{n-k} \\ &= \frac{1}{k!}(x+y)^k \end{aligned}$$

7 Séries entières complexes

EXERCICE 30:
Montrer que, pour tout $\theta\in\mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta.$$

4. où $H_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

On a $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. En particulier, si $z = i\theta$, on a

$$\mathrm{e}^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos\theta + i \sin\theta.$$

Deuxième partie

T.D.

Exercice 1

On considère la série entière $\sum \tan\left(\frac{n\pi}{7}\right) x^n$. La fonction tan est π-périodique, d'où la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\tan \frac{n\pi}{7}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est 7-périodique. D'où, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ; il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant M$. Or, le rayon de convergence de la série entière $\sum Mx^n = M\sum x^n$ vaut 1. D'où, le rayon R de convergence est $R \geqslant 1$. De plus, $a_n \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$, la série $\sum a_n$ diverge grossièrement, donc $R \leqslant 1$. On en déduit que

$$\boxed{R = 1.}$$

Exercice 6

Trouver les solutions développables en séries entières de l'équation différentielle (E) :

$$(E) : \quad 4x\, y''(x) + 2\, y'(x) - 1\, y(x) = 0.$$

Cette équation est homogène. Comme les coefficients ne sont pas constants, on ne peut pas utiliser la méthode de l'équation caractéristique.

Soit R le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n x^n$, et soit, pour $x \in \left]-R, R\right[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. On peut dériver terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence, d'où

$$\forall x \in \left]-R, R\right[, \quad \begin{cases} f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}; \\ f''(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n\, x^{n-2}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& f \text{ est une solution de } (E) \\
\iff & 4x \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n x^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \\
\iff & 4 \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \\
\iff & 2a_1 - a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(4n\,(n+1)\, a_{n+1} + 2n\,(n+1)\, a_{n+1} - a_n\Big) x^n = 0 \\
\iff & \begin{cases} 2a_1 - a_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 1,\ (2n+1)\,(2n+2)\, a_{n+1} - a_n = 0 \end{cases} \\
& \text{par unicité du développement en série entière} \\
\iff & \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{a_0}{(2n)!} \text{ par récurrence}
\end{aligned}$$

Donc, f est une solution de (E) sur $]-R, R[$ si, et seulement si

$$\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}.$$

On détermine maintenant R grâce à la règle de D'ALEMBERT.

— si $x = 0$, alors la série converge.

— si $x \neq 0$, soit alors $u_n = \left| \frac{x^n}{(2n)!} \right|$; d'où,

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \times |x| \\ &= \frac{|x|}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1. \end{aligned}$$

D'où, la série converge pour tout $x \in]-\infty, +\infty[$. On en déduit donc que $R = +\infty$.

On distingue deux cas, en fonction du signe de x.

1ER CAS si $x \geqslant 0$, alors $x = \left(\sqrt{x}\right)^2$, d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{x}\right)^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch}\left(\sqrt{x}\right).$$

2ND CAS si $x \leqslant 0$, alors $-x = \left(\sqrt{-x}\right)^2$, d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\left(\sqrt{-x}\right)^2 \right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\sqrt{-x}\right)^{2n}}{(2n)!} = \cos\left(\sqrt{x}\right).$$

On conclut : f est une solution développable en série entière sur $]-\infty, +\infty[$ si, et seulement si :

$$\exists K \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-\infty, +\infty[, \quad f(x) = \begin{cases} K \operatorname{ch}\left(\sqrt{x}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ K \cos\left(\sqrt{-x}\right) & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.$$