Chapitre 9

Produit

Hugo Salou MPI*
Dernière mise à jour le 14 décembre 2022

Première partie
Cours

1 Qu'est-ce qu'un produit scalaire ?

Définition 1:
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une application. On dit que φ est une forme

— *bilinéaire* si $\forall(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \in E^3$, $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases}\varphi(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) = \alpha\varphi(\vec{x}, \vec{z}) + \beta\varphi(\vec{y}, \vec{z}) \\ \varphi(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) = \alpha\varphi(\vec{x}, \vec{y}) + \beta\varphi(\vec{x}, \vec{z}),\end{cases}$

— *symétrique* si $\forall(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$, $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \varphi(\vec{y}, \vec{x})$,

— *définie* si $\forall\vec{x} \in E, \quad \varphi(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \implies \vec{x} = \vec{0}$,

— *positive* si $\forall\vec{x} \in E$, $\varphi(x, x) \geqslant 0$.

Définition 2:
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Si $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique définie positive, alors

— on dit que φ est un *produit scalaire*. Le produit scalaire $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ de deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y} \in E$ est aussi noté $\langle\vec{x} \mid \vec{y}\rangle$, $\langle\vec{x}, \vec{y}\rangle$, $(\vec{x} \mid \vec{y})$ ou $\vec{x} \cdot \vec{y}$.

— le carré scalaire $\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = \langle\vec{x} \mid \vec{x}\rangle$ étant positif, on appelle le réel

$$\|\vec{x}\|_2 = \|\vec{x}\| = \sqrt{\langle\vec{x} \mid \vec{x}\rangle}$$

norme (associée à ce produit scalaire) du vecteur $\vec{x}$.

En TD, il est, en général, plus efficace de le montrer dans l'ordre suivant :

$$\text{symétrie} \longrightarrow \text{bilinéaire} \longrightarrow \text{positive} \longrightarrow \text{définie.}$$

Exemple 3:
1. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est un espace euclidien[1] avec le produit scalaire : si $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, alors

$$\langle\vec{x} \mid \vec{y}\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

2. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace euclidien avec le produit scalaire : pour $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$,

$$\langle A \mid B\rangle = \sum_{\substack{i\in[\![1,n]\!] \\ j\in[\![1,n]\!]}} a_{i,j}b_{i,j} = \operatorname{tr}(A^\top \cdot B).$$

En effet, soit $C = A^\top \cdot B$, alors

$$\begin{aligned}(C)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} (A^\top)_{i,k} \times (B)_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (A)_{k,i} \times (B)_{k,j}\end{aligned}$$

et donc

$$\langle A \mid B\rangle = \operatorname{tr}(C) = \sum_{i=1}^{n} (C)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (A)_{k,i} \times (B)_{k,i}.$$

Montrons qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.

1. *i.e.* un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

1ère méthode Il s'agit de la même formule que pour l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

2nde méthode symétrique $\langle A \mid B\rangle = \operatorname{tr}(A^T \cdot B) = \operatorname{tr}\left((A^\top \cdot B)^\top\right) = \operatorname{tr}(B^\top \cdot A) = \langle B \mid A\rangle$.

bilinéaire Le produit matriciel est linéaire, et la trace est linéaire, d'où $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est bilinéaire.

positive $\langle A \mid A\rangle = \sum_{p,q} \left((A)_{p,q}\right)^2 \geqslant 0$.

définie On suppose $\langle A \mid A\rangle = 0$, alors $\forall p,q$, $\left((A)_{p,q}\right)^2 = 0$, et donc $\forall p, q$, $(A)_{p,q} = 0$, d'où $A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

3. L'espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b])$ des fonctions continue sur un segment $[a,b]$ est un espace préhilbertien [2] avec le produit scalaire

$$\langle f \mid g\rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t.$$

En effet,

symétrique $\forall f, g \in \mathcal{C}([a,b])$, $\langle f \mid g\rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\, f(t)\, \mathrm{d}t = \langle f \mid g\rangle$.

bilinéaire $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\forall (f_1, f_2, g) \in \mathcal{C}([a,b])^3$,

$$\begin{aligned}\langle \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \mid g\rangle &= \int_a^b (\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)) g(t)\, \mathrm{d}t \\ &= \alpha_1 \int_a^b f_1(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t + \alpha_2 \int_a^b f_2(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t \\ &= \alpha_1 \langle f_1 \mid g\rangle + \alpha_2 \langle f_2 \mid g\rangle\end{aligned}$$

Ainsi $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est linéaire à gauche, donc par symétrie, ce produit scalaire est bilinéaire.

positive $\forall f \in \mathcal{C}([a,b])$, $\int_a^b f^2(t)\, \mathrm{d}t \geqslant 0$.

définie On suppose que $\langle f \mid f\rangle = \int_a^b f^2(t)\, \mathrm{d}t = 0$, avec $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Or, la fonction $f^2 : t \mapsto f^2(t)$ ne change pas de signe et elle est continue. On en déduit que $f = 0_{\mathcal{C}([a,b])}$.

Exercice 4:
Soit $L_2(I)$ l'ensemble des fonctions f continues par morceaux et de carré intégrable sur I, où I est un intervalle, c'est à dire : l'intégrale $\int_I f^2(t)\, \mathrm{d}t$ converge. Montrer que

1. *le produit de deux fonctions de carré intégrable est intégrable ;*
2. *l'ensemble $L_2(I)$ est un espace vectoriel ;*
3. *l'ensemble $L_2(I) \cap \mathcal{C}(I)$ des fonctions continues de carré intégrable sur I est aussi un espace vectoriel ;*
4. *l'application $\langle f \mid g\rangle = \int_I f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$ est défini pour tout couple $(f, g) \in L_2(I)^2$, et que c'est un produit scalaire sur $L_2(I) \cap \mathcal{C}(I)$ mais pas sur $L_2(I)$.*

1. Soient $f \in L_2(I)$ et $g \in L_2(I)$, alors les intégrales $\int_I f^2(t)\, \mathrm{d}t$ et $\int_I g^2(t)\, \mathrm{d}t$ convergent. Or,

$$\forall t \in I, \quad \left(|f(t)| - |g(t)|\right)^2 = f^2(t) + g^2(t) - 2|f(t) \times g(t)| \geqslant 0.$$

D'où, $f^2(t) + g^2(t) \geqslant 2|f(t) \times g(t)| \geqslant 0$. Or, les intégrales $\int_I f^2(t)\, \mathrm{d}t$ et $\int_I g^2(t)\, \mathrm{d}t$ convergent. D'où l'intégrale $\int_I \left(f^2(t) + g^2(t)\right) \mathrm{d}t$. On en déduit donc que l'intégrale $\int_I f(t) \times g(t)\, \mathrm{d}t$ converge, *i.e.* $f \times g \in L_2(I)$.

2. Il "suffit" de montrer que $L_2(I)$ est un sous-espace vectoriel $\operatorname{Cpm}(I)$ des fonctions continues par morceaux sur I, *i.e.* la fonction nulle $0_{\operatorname{Cpm}(I)} \in L_2(I)$ et que $L_2(I)$ est stable par combinaison linéaire. L'intégrale $\int_I 0^2\, \mathrm{d}t$ converge, donc la fonction nulle est bien de carré intégrable. Et, pour $t \in I$, $(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha^2 f^2(t) + \beta^2 g(t) + 2\alpha\beta\, f(t)\, g(t)$; or, $f \in L_2(I)$, donc l'intégrale $\int_I f^2(t)\, \mathrm{d}t$ converge, et de même, l'intégrale $\int_I g^2(t)\, \mathrm{d}t$ converge. De plus, d'après la question précédente, l'intégrale $\int_I f(t) \times g(t)\, \mathrm{d}t$ converge. On en déduit que l'intégrale $\int_I (\alpha f + \beta g)^2\, \mathrm{d}t$ converge, *i.e.* $\alpha f + \beta g \in L_2(I)$.

2. *i.e.* un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension potentiellement infinie muni d'un produit scalaire.

3. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel. Or, $L_2(I)$ est un *sev* de $\text{Cpm}(I)$, et $\mathcal{C}(I)$ est un *sev* de $\text{Cpm}(I)$. D'où $L_2(I) \cap \mathcal{C}(I)$ est un *sev* de $\text{Cpm}(I)$. On en déduit que $L_2(I) \cap \mathcal{C}(I)$ est un espace vectoriel.
4. — Soit $a \in I$. On pose la fonction continue par morceaux

$$\begin{aligned} \varphi : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq a \\ 1 & \text{si } x = a. \end{cases} \end{aligned}$$

   On a bien $\varphi \in L_2(I)$, et $\int_I \varphi^2(t)\ \mathrm{d}t = 0$ alors que $\varphi \neq 0$ car $\varphi(a) \neq 0$. Ainsi, l'application $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ n'est pas définie, ce n'est donc pas un produit scalaire.

   — Par linéarité de l'intégrale, l'application $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est bilinéaire. Par commutativité de la multiplication de réels, elle est symétrique. Par croissance de l'intégrale, elle est aussi positive. Finalement, si $f \in L_2(I) \cap \mathcal{C}(I)$, et que $\int_I f^2(t)\ \mathrm{d}t = 0$ alors $f = 0$ car f^2 est continue et ne change pas de signe.

Remarque ("Secret"):
On dit que $f \in L_1(I)$ si, et seulement si l'intégrale $\int_I |f(t)|\ \mathrm{d}t$ converge.

Exercice 5:
Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. *Montrer que les applications*

$$\varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\ \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \psi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)\, Q(k)$$

   sont deux produits scalaires sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$, et écrire la norme associé à chaque produit scalaire.
2. *Montrer que φ est encore un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ mais que ψ ne l'est plus.*

1. On a $E = \mathbb{R}_n[X] \subset \mathcal{C}([-1, 1])$. Or, φ est déjà un produit scalaire donc c'est encore un produit scalaire sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. Sinon, on remontre les conditions pour que φ soit un produit scalaire. On voit clairement que φ est bilinéaire (par linéarité de l'intégrale), symétrique (par commutativité du produit), et positive (par croissance de l'intégrale). Montrons que l'application φ est définie : si $\langle P \mid P\rangle = 0$, alors $\int_{-1}^{1} P^2(t)\ \mathrm{d}t = 0$; ainsi, la fonction $[-1, 1] \to \mathbb{R}, t \mapsto P(t)$ est nulle car P^2 est continue et ne change pas de signe. On en déduit que le polynôme P a une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul.

   On voit clairement que l'application ψ est bilinéaire (par linéarité de la somme), symétrique (par commutativité du produit), positive (par croissance de la somme). Montrons que la fonction ψ est définie : soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\psi(P, P) = 0$, alors $\sum_{k=0}^{n} P^2(k) = 0$, d'où $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(k) = 0$, le polynôme P a donc au moins $n + 1$ racines. Or, comme P pour degré au plus n, on en déduit que P est le polynôme nul. La fonction ψ est donc un produit scalaire.

   La norme associée au produit scalaire φ est

$$\|\cdot\|_\varphi : P \mapsto \|P\|_\varphi = \sqrt{\int_{-1}^{b} P^2(t)\ \mathrm{d}t}.$$

   Et, la norme associée au produit scalaire ψ est

$$\|\cdot\|_\psi : P \mapsto \|P\|_\psi = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} P^2(k)}.$$

2. On a $\mathbb{R}[X] \subset \mathcal{C}([-1, 1])$, le produit scalaire φ en est toujours un sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$. Mais, ψ n'est plus un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. En effet, on considère le polynôme $P(X) = X \cdot (X - 1) \cdots (X - n) \neq 0$ de $\mathbb{R}_n[X]$, et $\psi(P, P) = \sum_{k=0}^{n} P^2(k) = \sum_{k=0}^{n} 0 = 0$.

2 (In)égalités

Théorème 6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz):
Soit $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ un produit scalaire sur un espace vectoriel E. Alors,

$$\forall(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \quad \left|\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle\right| \leqslant \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|.$$

Et, il y a égalité si et seulement si les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires.

L'inégalité ci-dessous est toujours vrai si l'on n'a pas un produit scalaire mais une application bilinéaire, symétrique et positive (*i.e.* on n'utilise pas le caractère défini de l'application). Mais, le cas de l'égalité n'est pas toujours vrai si l'application n'est pas définie.

Démonstration:
On suppose $\vec{y} \neq \vec{0}$. En effet, si $\vec{x} = \vec{0}$, l'inégalité est clairement vérifiée. Posons la fonction f définie comme

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\longmapsto \langle \vec{x} + \lambda\vec{y} \mid \vec{x} + \lambda\vec{y} \rangle \end{aligned}$$

Par bilinéarité, on a

$$\forall\lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda) = \lambda^2 \langle \vec{y} \mid \vec{y} \rangle + \lambda\big(\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle + \langle \vec{y} \mid \vec{x} \rangle \big) + \langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle .$$

Et, par symétrie, on en déduit que

$$\forall\lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda) = \lambda^2 \langle \vec{y} \mid \vec{y} \rangle + 2\lambda \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle + \langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle ,$$

qui est un polynôme de degré 2 (car $\langle y \mid y \rangle \neq 0$) Or, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f(\lambda) \geqslant 0$ par positivité du produit scalaire. Donc le discriminant du polynôme $f(\lambda)$ en λ est négatif ou nul (pour ne pas que $f(\lambda)$ ne change de signe). Or, le discriminant Δ est

$$\Delta = \big(2 \langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle\big)^2 - 4 \cdot \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 \leqslant 0.$$

" $\Longleftarrow$ " Si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{y} = \lambda\vec{x}$ ou $\vec{x} = \lambda\vec{y}$. Quite à utiliser le caractère symétrique du produit scalaire, on suppose, sans perdre de généralités, que $\vec{x} = \lambda\vec{y}$. On a donc $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \langle \vec{x} \mid \lambda\vec{y} \rangle = \lambda \cdot \|\vec{x}\|^2$. Et, $\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| = \|\vec{x}\| \cdot \|\lambda\vec{x}\| = \|x\| \cdot |y| \cdot \|\vec{x}\|$, d'où l'égalité.

" $\Longrightarrow$ " On suppose $\left|\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle\right| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$. Alors, $\Delta = 0$ et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(\lambda) = 0$, *i.e.* $\langle \vec{x} + \lambda\vec{y} \mid \vec{x} + \lambda\vec{y} \rangle = 0$. Ainsi, par le caractère défini du produit scalaire, alors $x + \lambda\vec{y} = \vec{0}$, *i.e.* $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires.

Exemple 7:

1. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique :

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Ainsi, par inégalité de Cauchy-Schwarz ($|\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle| \leqslant \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$),

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Mieux, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $(|x_1|, \ldots, |x_n|)$ et $(|y_1|, \ldots, |y_n|)$, on a donc

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

2. On munit $\mathcal{C}([a,b])$ de son produit scalaire canonique $\langle f \mid y \rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\Big|\int_a^b f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t\Big| \leqslant \int_a^b |f(t)\, g(t)|\, \mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\, \mathrm{d}t} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(t)\, \mathrm{d}t}$$

en appliquant Cauchy-Schwarz aux fonctions f et g, puis aux fonctions $|f|$ et $|g|$.

3. On munit l'espace vectoriel $L_2(I)$ de la fonction ("pseudo-produit scalaire") $\langle f \mid g \rangle = \int_I f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$. Cette formule vérifie les hypothèses de bilinéarité, de symétrie et de positivité. Et, avec ces hypothèses, l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \int_a^b f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |f(t)\, g(t)|\, \mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\, \mathrm{d}t} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(t)\, \mathrm{d}t}.$$

Corollaire 8:
Soit $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. La norme

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \sqrt{\langle x \mid x \rangle} \end{aligned}$$

vérifie

1. $\forall x \in E$, si $\|x\| = 0$, alors $x = 0$;
2. $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3. $\forall (x, y) \in E^2$, on a $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. (inégalité triangulaire)

Corollaire 9:
Si x et y sont deux vecteurs non nuls, alors il existe un unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que

$$\langle x \mid y \rangle = \|x\|\, \|y\|\, \cos\theta.$$

On appelle θ l'*écart angulaire* des deux vecteurs. Également,

$$x \text{ et } y \text{ sont colinéaires} \iff \theta = 0 \text{ ou } \theta = \pi.$$

Remarque 10:
On munit un espace vectoriel E d'un produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$, et on calcule

$$\begin{cases} \|x + y\|^2 = \langle x + y \mid x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\,\langle x \mid y \rangle + \|y\|^2 \\ \|x - y\|^2 = \langle x + y \mid x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\,\langle x \mid y \rangle + \|y\|^2. \end{cases}$$

Par somme et produit, il en résulte l'égalité

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2.$$

Et, en isolant les termes du premier système, on trouve

$$\begin{cases} 2\,\langle x \mid y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \\ 2\,\langle x \mid y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2 \end{cases}.$$

Par somme, on trouve aussi

$$4\,\langle x \mid y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2.$$

3 Orthogonalité

Définition 11:
$\varnothing$

Exemple 12:
On munit l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([-1, 1])$ de son produit scalaire canonique.

1. Montrons que les fonctions $u : x \mapsto 1 + x^2$ et $v : x \mapsto 2 - 5x^2$ sont orthogonales (*i.e.* $u \perp v$) :

$$\langle u \mid v \rangle = \int_{-1}^1 (1 + x^2)(2 - 5x^2)\, \mathrm{d}x = 0$$

en développant l'intégrande.

2. Montrons que les sous-espaces vectoriel $\mathcal{P}$ des fonctions paires et $\mathcal{I}$ des fonctions impaires sont orthogonales (*i.e.* $\mathcal{P} \perp \mathcal{I}$). Soit $f \in \mathcal{P}$ et $g \in \mathcal{I}$.

$$\begin{aligned}\langle f \mid g\rangle &= \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_{1}^{-1} f(-u)\, g(-u) \quad -\mathrm{d}u \text{ avec le } cdv\ u=-t \text{ qui est } \mathcal{C}^1 \\ &= \int_{-1}^{1} f(u)\cdot\big(-g(u)\big)\ \mathrm{d}u \\ &= 0.\end{aligned}$$

Proposition 13:
Si n vecteurs $v_1, \dots, v_n$ sont orthogonaux deux à deux [3], alors

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} v_i \Big\|^2 = \sum_{i=1}^{n} ||v_i||^2.$$

Démonstration:
Par définition,

$$\begin{aligned}\Big\| \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \Big\|^2 &= \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \,\Big|\, \sum_{j=1}^{n} \vec{v}_i \Big\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle \vec{v}_i \mid \vec{v}_j\rangle \text{ par bilinéarité} \\ &= \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \langle \vec{v}_i \mid \vec{v}_j\rangle \\ &= \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \delta_{i,j}\,\langle \vec{v}_i \mid \vec{v}_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{v}_i \mid \vec{v}_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} ||\vec{v}_i||^2\end{aligned}$$

Remarque 14: 1. On a, pour deux vecteurs u et v

$$u \perp v \iff ||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2.$$

2. Mais, ce résultat est faux en général pour plus de deux vecteurs. Contre-exemple : soit $\vec{u} \in E$ un vecteur non nul d'un espace vectoriel E ; on pose $\vec{v} = \vec{w} = -2\vec{u}$. D'une part, $||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + ||\vec{w}||^2 = (1+4+4)\,||\vec{u}||^2 = 9||\vec{u}||^2$. D'autre part $||\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}||^2 = ||-3\vec{u}||^2 = 9||\vec{u}||^2$. Mais, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

Proposition 15:
Si n vecteurs non nuls sont orthogonaux deux à deux, alors ils sont linéairement indépendants. *Autrement dit*, une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Démonstration:
Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs non nuls, orthogonaux deux à deux. On suppose que $\alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}$. D'où,

$$0 = \langle \alpha_1 \vec{v}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{v}_n \mid \vec{v}_1 \rangle = \alpha_1 \langle \vec{v}_1 \mid \vec{v}_1 \rangle .$$

3. *i.e.* $\forall i \neq j,\ v_i \perp v_j$

Or, $\langle \vec{v}_1 \mid \vec{v}_1 \rangle \neq 0$ car $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$, donc $\alpha_1 = 0$. De même pour $\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$. On en déduit que $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, la famille est donc libre.

Définition 16:
Soit A un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien E. L'ensemble des vecteurs orthogonaux à A est appelé l'*orthogonal* de A et est noté $A^\perp$:

$$A^\perp = \{\vec{x} \in E \mid \vec{x} \perp A\} = \{\vec{x} \in E \mid \forall \vec{y} \in A,\ \vec{x} \perp \vec{y}\}.$$

Exercice 17:

1. *Montrer que* $\{0_E\}^\perp = E$ *et que* $E^\perp = \{0_E\}$.
2. *Soit l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$ *muni du produit scalaire canonique. Soit* $\vec{u} = (1, 2, 3)$. *Déterminer une base de* $\mathrm{Vect}(\vec{u})^\perp$.
3. *Soit le produit scalaire* $\langle P \mid Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\ \mathrm{d}t$ *sur l'espace vectoriel* $E = \mathbb{R}_2[X]$. *Soit le polynôme* $U = 1 + X^2$. *Déterminer une base de* $(\mathrm{Vect}\, U)^\perp$.

1.
2. Soit $\vec{x} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\vec{x} \in (\mathrm{Vect}\, u)^\perp &\iff \vec{x} \perp \mathrm{Vect}(\vec{u}) \\
&\iff \forall \vec{y} \in \mathrm{Vect}(\vec{u}),\ \vec{x} \perp \vec{y} \\
&\iff \vec{x} \perp \vec{u} \\
&\iff 1a + 2b + 3c = 0 \\
&\iff a = -2b - 3c \\
&\iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2b - 3c \\ b \\ c \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   Donc $(\mathrm{Vect}\, \vec{u})^\perp = \mathrm{Vect}(\vec{v}, \vec{w})$ où $\vec{v} = (-2, 1, 0)$ et $\vec{w} = (-3, 0, 1)$.
3. Soit $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{aligned}
P \in (\mathrm{Vect}\, U)^\perp &\iff P \perp \mathrm{Vect}(U) \\
&\iff \forall Q \in \mathrm{Vect}(U),\ P \perp Q \\
&\iff P \perp U \\
&\iff \left\langle a + bX + cX^2 \mid 1 + X^2 \right\rangle = 0 \\
&\iff \int_{-1}^{1} (a + bt + ct^2)(1 + t^2)\ \mathrm{d}t = 0 \\
&\iff \int_{-1}^{1} \left(ct^4 + bt^3 + (a + c)t^2 + bt + a\right)\ \mathrm{d}t = 0 \\
&\iff \frac{2}{5}c + \frac{2}{3}(a + c) + 2a = 0 \\
&\iff \frac{8}{3}a + \frac{16}{5}c = 0 \\
&\iff 5a + 2c = 0 \\
&\iff b = b \text{ et } c = -\frac{5}{2}a \\
&\iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -\frac{5}{2}a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   Ainsi, $(\mathrm{Vect}\, U)^\perp = \mathrm{Vect}(P, Q)$ où $P = 1 - \frac{5}{2}X^2$ et $Q = X$.

Proposition 18:
Soient A et B deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E. On a

1. $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E ;

2. $A \cap A^\perp = \{0_E\}$;
3. $A \perp B \iff A \subset B^\perp \iff B \subset A^\perp$;
4. $A \subset (A^\perp)^\perp$.

Démonstration: 2. Tout d'abord, $\{0_E\} \subset A \cap A^\perp$; en effet, $0_E \in A$ et $0_E \in A^\perp$ car A et $A^\perp$ sont des sous-espaces vectoriels de E. Réciproquement, soit $\vec{x} \in A \cap A^\perp$. Alors, $\vec{x} \in A$ et $\vec{x} \in A^\perp$, d'où $\vec{x} \perp A$. Ainsi, pour tout vecteur $\vec{y} \in A$, $\vec{x} \perp \vec{y}$. En particulier, on a $\vec{x} \perp \vec{x}$. Ainsi, $\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle = 0$ et donc $\vec{x} = 0_E$ par le caractère défini du produit scalaire.

3.
$$\begin{aligned} A \perp B &\iff \forall \vec{x} \in A,\ \vec{x} \perp B \\ &\iff \forall \vec{x} \in A,\ \vec{x} \in B^\perp \\ &\iff A \subset B^\perp \end{aligned}$$

De même, par symétrique de la relation $\perp$,
$$A \perp B \iff B \perp A \iff B \subset A^\perp.$$

4. On $A \perp A^\perp$, et d'après 3., $A \subset (A^\perp)^\perp$.

4 Bases orthonormées

Définition 19: 1. Un vecteur $\vec{x}$ est *normé* si $||\vec{x}|| = 1$.

2. Une famille $(\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$ est *orthonormée* si
$$\forall i \neq j \in [\![1, n]\!], \quad \langle \vec{\varepsilon}_i | \vec{\varepsilon}_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque:
Soit $\mathcal{C} = (\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$ une base orthonormée d'un espace vectoriel E. Soient $E \ni \vec{x} = x_1\vec{\varepsilon}_1 + \dots + x_n\vec{\varepsilon}_n$, et $E \ni \vec{y} = y_1\vec{\varepsilon}_1 + \dots + y_n\vec{\varepsilon}_n$.

1. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, $\langle \vec{x} \mid \varepsilon_i \rangle = x_i$ par bilinéarité du produit scalaire et car la famille est orthonormée.
2. $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ par bilinéarité du produit scalaire et la propriété précédente.
3. $||\vec{x}||^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$, avec la propriété précédente et $\vec{x} = \vec{y}$.
4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]} = [f]_{\mathcal{C}}$. Alors, $\langle \vec{\varepsilon}_i \mid f(\vec{\varepsilon}_j) \rangle = a_{i,j}$. En effet, $f(\vec{\varepsilon}_j) = a_{1,j}\vec{\varepsilon}_1 + \dots + a_{n,j}\vec{\varepsilon}_n$. Ainsi,
$$\langle \vec{\varepsilon}_i \mid f(\vec{\varepsilon}_j) \rangle = \langle \vec{\varepsilon}_i \mid a_{1,j}\vec{\varepsilon}_1 + \cdots a_{n,j}\vec{\varepsilon}_n \rangle = a_{i,j} \langle \varepsilon_i \mid \varepsilon_i \rangle = a_{i,j}.$$

5 L'algorithme de Gram-Schmidt

Remarque 20:
$\varnothing$

Exercice 21:
Déterminer une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire
$$\langle P \mid Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\ \mathrm{d}t.$$

On pose la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et on construit, à l'aide de l'algorithme de Gram-Schmidt, une base orthonormée $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

1. On a $\varepsilon_1 = \frac{1}{||1||}$. Or, $||1|| = \sqrt{\langle 1 \mid 1 \rangle}$, et $\langle 1 \mid 1 \rangle = \int_{-1}^{1} 1\ \mathrm{d}t = 2$, donc $||1|| = \sqrt{2}$. On a donc
$$\varepsilon_1 = 1/\sqrt{2}.$$

2. On pose $\hat{\varepsilon}_2 = X - a\varepsilon_1$.

$$\hat{\varepsilon}_2 \perp \varepsilon_1 \iff \langle X - a\varepsilon_1 \mid \varepsilon_1 \rangle = 0 \iff \langle X \mid \varepsilon_1 \rangle = a \langle \varepsilon_1 \mid \varepsilon_1 \rangle = a.$$

Calculons $a = \langle X \mid \varepsilon_1 \rangle$: $\langle X \mid \varepsilon_1 \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{2}}\ \mathrm{d}t = 0$. D'où, $\hat{\varepsilon}_2 = X$. On pose $\varepsilon_2 = X/\|X\|$. Or, $\|X\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} t^2\ \mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. On en déduit que

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}X.$$

3. On pose $\hat{\varepsilon}_3 = X^2 - a\varepsilon_1 - b\varepsilon_2$.

$\hat{\varepsilon}_3 \perp \varepsilon_1 \iff \left\langle X^2 - a\varepsilon_1 - b\varepsilon_2 \mid \varepsilon_1 \right\rangle = 0 \iff \left\langle X^2 \mid \varepsilon_1 \right\rangle - a = 0 \hat{\varepsilon}_3 \perp \varepsilon_2 \iff \left\langle X^2 - a\varepsilon_1 - b\varepsilon_2 \mid \varepsilon_2 \right\rangle = 0 \iff \left\langle X^2 \mid \varepsilon_2 \right\rangle$

On calcule a et b, et on trouve $\hat{\varepsilon}_3 = X^2 - \frac{1}{3}$. Or, $\|\hat{\varepsilon}_3\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2\ \mathrm{d}t} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{5}}$.

6 Projection orthogonale (sur un *sev* de dimension finie)

Proposition – Définition 22:
Soit E un espace préhilbertien[4], et soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie n de E. Il existe une unique application linéaire $p \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\forall \vec{x} \in E, \qquad (*)\ p(\vec{x}) \in F \quad \text{et} \quad (**)\ \vec{x} - p(\vec{x}) \perp F.$$

On dit que p est la *projection orthogonale*, et $p(\vec{x})$ le *projeté orthogonal* de $\vec{x}$ sur F. Dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$, on a

$$\forall \vec{x} \in E, \quad p(\vec{x}) = \langle \vec{x} \mid \vec{\varepsilon}_1 \rangle \vec{\varepsilon}_1 + \dots + \langle \vec{x} \mid \vec{\varepsilon}_n \rangle \vec{\varepsilon}_n = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x} \mid \vec{\varepsilon}_i \rangle \vec{\varepsilon}_i.$$

Démonstration:
On choisit une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de F. On l'orthonormalise en une base $(\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$. Soit $\vec{x} \in E$. On a

$$(*) \iff \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n,\ p(\vec{x}) = \lambda_1 \vec{\varepsilon}_1 + \dots + \lambda_n \vec{\varepsilon}_n$$

et

$$\begin{aligned}(**) &\iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ \vec{x} - p(\vec{x}) \perp \vec{\varepsilon}_i \\ &\iff \forall i \in [\![1, n]\!], \langle \vec{x} - p(\vec{x}) \mid \vec{\varepsilon}_i \rangle = 0 \\ &\iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ \langle \vec{x} - (\lambda_1 \vec{\varepsilon}_1 + \dots + \lambda_n \vec{\varepsilon}_n) \mid \vec{\varepsilon}_i \rangle = 0 \\ &\iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ \langle \vec{x} \mid \vec{\varepsilon}_i \rangle - \lambda_i = 0\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien

$$p(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x} \mid \vec{\varepsilon}_i \rangle \vec{\varepsilon}_i.$$

Exercice 23: 1. On pose $E = \mathbb{R}^3$, F le plan d'équation $x + y = 0$, et le produit scalaire $\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. Le sous-espace vectoriel F est de dimension finie, d'où

$$\forall \vec{x} = (x, y, z) \in E,\ p(\vec{x}) = \langle \vec{x} \mid \vec{\varepsilon}_1 \rangle \vec{\varepsilon}_1 + \langle \vec{x} \mid \vec{\varepsilon}_2 \rangle \vec{\varepsilon}_2$$

où $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$ est une base orthonormée de F.

4. il peut être de dimension infinie.

$$\begin{aligned}\vec{x} = (x, y, z) \in F &\iff x + y = 0\\ &\iff z = 0 \text{ et } y = -x\\ &\iff (x, y, z) = (x, -x, z) = x\underbrace{(1, -1, 0)}_{\vec{e}_1} + z\underbrace{(0, 0, 1)}_{\vec{e}_2}\end{aligned}$$

On orthonormalise la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ en $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$ en posant

$$\vec{\varepsilon}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) \quad \text{et} \quad \vec{\varepsilon}_2 = (0, 0, 1).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}p(\vec{x}) &= \langle \vec{x} \mid \vec{\varepsilon}_1 \rangle \vec{\varepsilon}_1 + \langle \vec{x} \mid \vec{\varepsilon}_2 \rangle \vec{\varepsilon}_2\\ &= \frac{x - y}{\sqrt{2}}\vec{\varepsilon}_1 + z\vec{\varepsilon}_2.\end{aligned}$$

D'où,

$$[p]_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} p(\vec{\imath}) & p(\vec{\jmath}) & p(\vec{k}) \end{array} \end{array}$$

2. On pose $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \mathbb{R}_2[X]$, et le produit scalaire $\langle P \mid Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\, \mathrm{d}t$. Le *sev* F est de dimension finie, égale à 3. On construit une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ orthonormée de F en posant

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \varepsilon_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}X, \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_3 = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right).$$

D'où,

$$p(X^3) = \langle X^3 \mid \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 + \langle X^3 \mid \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2 + \langle X^3 \mid \varepsilon_3 \rangle \varepsilon_3.$$

D'une part, $\langle X^3 \mid \varepsilon_1 \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{t^3}{\sqrt{2}}\, \mathrm{d}x = 0$. De même pour les autres produits scalaires. On en déduit que

$$\frac{3}{5}X.$$

Corollaire 24:
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$.

1. F et son orthogonal sont supplémentaires : $F \oplus F^\perp = E$;
2. Par suite,
   (a) la projection orthogonale sur F est le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$;
   (b) $F = (F^\perp)^\perp$.

Démonstration:
D'après la proposition 18, $F \cap F^\perp = \{\vec{0}\}$, leur somme est donc directe. Montrons que $F + F^\perp = E$: soit $\vec{x} \in E$, alors $p(\vec{x}) \in F$ et $\vec{x} - p(\vec{x}) \in F^\perp$; en sommant ces deux vecteurs, on a bien $\vec{x} \in F + F^\perp = E$.

Théorème 25 (moindres carrés):
Soit F un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien E. Soit $\vec{x} \in E$. Le projeté orthogonal $p(\vec{x})$ de $\vec{x}$ sur F est l'unique vecteur tel que

$$\forall \vec{y} \in F, \quad \|\vec{x} - p(\vec{x})\| \leqslant \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

Démonstration:
Soient $\vec{x} \in E$ et $\vec{y} \in F$. On a $\vec{x} - p(\vec{x}) \perp F$ et $p(\vec{x}) - \vec{y} \in F$, d'où $\vec{x} - p(\vec{x}) \perp p(\vec{x}) - \vec{y}$. Ainsi, d'après le théorème de Pythagore,

$$\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x} + p(\vec{x})\|^2 + \|\vec{y} - p(\vec{x})\|^2.$$

On a donc bien $\|\vec{x} - \vec{y}\| \geqslant \|\vec{x} - p(\vec{x})\|$. Également,

$$\begin{aligned}\|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{x} - p(\vec{x})\| &\iff \|\vec{y} - p(\vec{x})\| = 0\\ &\iff \vec{y} = p(\vec{x}).\end{aligned}$$

Remarque 26: 1. D'après le théorème précédent, la fonction

$$\begin{aligned} F &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{y} &\longmapsto \|\vec{x} - \vec{y}\| \end{aligned}$$

admet un minimum en $p(\vec{x})$.

2. Le réel $\|\vec{x} - p(\vec{x})\|$ est la *distance* entre le vecteur $\vec{x}$ et le *sev* F. On le note $d(\vec{x}, F)$.
3. On a l'inégalité de Bessel : pour tout vecteur $\vec{x} \in E$, $\|p(\vec{x})\| \leqslant \|\vec{x}\|$.

Exercice 27:
On pose $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P \mid Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)\, Q(t)\, \mathrm{d}t.$$

Puis, on pose $F = \mathbb{R}_2[X]$. Alors,

$$\begin{aligned} f(a,b,c) &= \int_{-1}^{1} \left(t^3 - (at^2 + bt + c)\right)^2 \mathrm{d}t \\ &= \left\langle X^3 - (aX^2 + bX + c) \mid X^3 - (aX^2 + bX + c) \right\rangle \\ &= \|X^3 - (aX^2 + bX + c)\|^2. \end{aligned}$$

Or, d'après le théorème des moindres carrés, $f(a,b,c)$ est minimal pour $aX^2 + bX + c = p(X^3)$, où p est la projection de E sur F, et ce minimum est atteint une seule fois :

$$\min_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} f(a,b,c) = \|X^3 - p(X^3)\|^2.$$

Calculons $p(X^3)$:

- On orthonormalise la base $(1, X, X^2)$ en $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ avec l'algorithme de Gram-Schmidt. On a déjà fait ce calcul à l'exercice 21 : $\varepsilon_1 = 1/\sqrt{2}$, $\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} X$ et $\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right)$.
- On utilise la formule de la projection orthogonale, qu'on a déjà fait à l'exercice 23 : $p(X^3) = \frac{3}{5} X$.
- On en conclut que $a = 0$, $b = \frac{3}{5}$ et $c = 0$.

Pour calculer la valeur de $f(0, \frac{3}{5}, 0)$, on pourrait calculer l'intégrale (ou de manière équivalente utiliser la norme). Mais, on utilise le théorème de Pythagore :

$$\|X^3 - p(X^3)\|^2 = \|X^3\|^2 - \|p(X^3)\|^2.$$

Et, $\|X^3\|^2 = \int_{-1}^{1} t^6 \, \mathrm{d}^2 = \frac{2}{7}$, et $\|p(X^3\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(-\frac{3}{5}t\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{9}{25} \cdot \frac{2}{3}$. Ainsi

$$f\left(0, \frac{3}{5}, 0\right) = \frac{2}{7} - \frac{6}{25}.$$

7 Hyperplans

Rappel:
Un *hyperplan* H de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle :

$$H = \operatorname{Ker} \varphi \qquad \text{où} \qquad \tilde{0} \neq \varphi : \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\text{linéaire}} & \mathbb{R} \\ \vec{x} & \longmapsto & \varphi(\vec{x}) \end{array}.$$

Si E est de dimension finie n, alors

$$H \text{ est un hyperplan} \iff \dim F = n - 1.$$

Toute forme linéaire est, ou bien nulle, ou bien surjective. Si deux formes linéaires ont le même noyau, alors elles sont proportionnelles.

Proposition 28:
Soit E un espace préhilbertien.

1. L'orthogonal d'une droite vectorielle D est un hyperplan H : $D^\perp = H$.
2. Si E est de dimension finie, l'orthogonal d'un hyperplan H est une droite vectorielle D : $H^\perp = D$. Autrement dit, toutes les équations d'un hyperplan sont proportionnelles (*i.e.* les mêmes à un facteur près).

Démonstration: 1. Il existe un vecteur $\vec{a} \in E \setminus \{\vec{0}\}$ tel que $D = \text{Vect}(\vec{a})$. Soit $\vec{x} \in E$.

$$\begin{aligned} \vec{x} \in D^\perp &\iff \vec{x} \perp D \\ &\iff \forall \vec{y} \in D,\ \vec{x} \perp \vec{y} \\ &\iff \vec{x} \perp \vec{a} \\ &\iff \langle \vec{x} \mid \vec{a} \rangle = 0 \end{aligned}$$

Soit $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x} \mid \vec{a} \rangle$. L'application φ est une forme linéaire par bilinéarité du produit scalaire. Ainsi, on a bien $\vec{x} \in D^\perp \iff \vec{x} \in \operatorname{Ker} \varphi$. Or, la forme linéaire n'est pas nulle car $\varphi(\vec{a}) \neq 0$, par le caractère défini du produit scalaire.

2. D'après le corolaire 24, comme E est de dimension finie n, $H \oplus H^\perp = E$. Or, $\dim H = n-1$ et donc $\dim(H^\perp) = n - (n-1) = 1$. L'espace vectoriel $H^\perp$ est bien une droite vectorielle.

Théorème 29 (représentation de Riesz):
Soit E un espace euclidien. Pour toute forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$, alors il existe un unique vecteur $\vec{a} \in E$ tel que $\varphi = \langle \vec{a} \mid \cdot \rangle$, *i.e.*

$$\forall \vec{x} \in E, \quad \varphi(\vec{x}) = \langle \vec{a} \mid \vec{x} \rangle .$$

Démonstration:
Soit $\mathcal{B} = (\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$ une base orthonormée de E (que l'on peut trouver à l'aide de l'algorithme de Gram-Schmidt). Soit $\vec{x} \in E$. On pose $\vec{x} = x_1\vec{\varepsilon}_1 + x_2\vec{\varepsilon}_2 + \cdots + x_n\vec{\varepsilon}_n$. L'application φ est linéaire, donc $\varphi(\vec{x}) = x_1\varphi(\vec{\varepsilon}_1) + \cdots + x_n\varphi(\vec{\varepsilon}_n)$. On pose, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i = \varphi(\vec{\varepsilon}_i)$. Ainsi,

$$\varphi(\vec{x}) = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n.$$

On pose $\vec{a} = a_1\vec{\varepsilon}_1 + \cdots + a_n\vec{\varepsilon}_n$. Ainsi, $\langle \vec{a} \mid \vec{x} \rangle = \varphi(\vec{x})$. Montrons que ce vecteur $\vec{a}$ est unique. Par l'absurde, on suppose que $\vec{a} \neq \vec{b}$ et $\langle \vec{a} \mid \vec{x} \rangle = \left\langle \vec{b} \mid \vec{x} \right\rangle$. Alors, $\forall \vec{x} \in E$, $\left\langle \vec{x} \mid \vec{a} - \vec{b} \right\rangle = 0$ par bilinéarité. En particulier, $\vec{a} - \vec{b} \in E$, et donc $\left\langle \vec{a} - \vec{b} \mid \vec{a} - \vec{b} \right\rangle = 0$, ce qui est absurde car $\vec{a} - \vec{b} \neq \vec{0}$.

Exercice 30: 1. On sait que $d(\vec{x}, H) = \|\vec{x} - p(\vec{x})\|$ où p est la projection orthogonale sur H, qui existe car H est de dimension finie, car E est euclidien. On veut montrer que

$$d(\vec{x}, H) = \frac{|\langle \vec{x} \mid \vec{a} \rangle|}{\|\vec{a}\|}$$

où $\vec{a} \neq \vec{0}$ et est orthogonal à H. On sait déjà que $\text{Vect}(\vec{a}) \perp H$, d'où $\text{Vect}(\vec{a}) \subset H^\perp$. Par un argument de dimensions, on a $H^\perp = \text{Vect}(\vec{a})$ car $H \oplus H^\perp = E$. On sait déjà que $\vec{x} - p(\vec{x}) \in H^\perp$, il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{x} - p(\vec{x}) = \lambda\vec{a}$. D'où,

$$\begin{aligned} \langle \vec{x} - p(\vec{x}) \rangle &= \lambda \langle \vec{a} \mid \vec{a} \rangle = \lambda \|a\|^2 \\ &= \langle \vec{x} \mid \vec{a} \rangle \end{aligned}$$

car $p(\vec{x}) \perp \vec{a}$. D'où, $\lambda = \langle \vec{x} \mid \vec{a} \rangle / \|\vec{a}\|^2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \|\vec{x} - p(\vec{x})\|^2 &= \left\| \frac{\langle \vec{x} \mid \vec{a} \rangle}{\|\vec{a}\|^2} \cdot \vec{a} \right\| \\ &= \frac{\langle \vec{x} \mid \vec{a} \rangle^2}{\|\vec{a}\|^4} \|\vec{a}\|^2 \\ &= \left(\frac{\langle \vec{x} \mid \vec{a} \rangle}{\|a\|} \right)^2 \end{aligned}$$

D'où

$$d(\vec{x}, H) = \left| \frac{\langle \vec{x} \mid \vec{a} \rangle}{\|\vec{a}\|} \right| = \frac{|\langle \vec{x} \mid \vec{a} \rangle|}{\|\vec{a}\|}.$$

2. D'après le théorème de Pythagore,

$$d^2(\vec{x}, D) + d^2(\vec{x}, H) = ||\vec{x}||^2$$

d'où

$$\begin{aligned} d(\vec{x}, D) &= \sqrt{||\vec{x}||^2 - d^2(\vec{x}, H)} \\ &= \sqrt{||\vec{x}||^2 - \frac{\langle \vec{x} \mid \vec{a} \rangle^2}{||a||^2}} \\ &= \frac{\sqrt{||\vec{a}||^2 \cdot ||\vec{x}||^2 - \langle \vec{x} \mid \vec{a} \rangle}}{||\vec{a}||} \end{aligned}$$

Deuxième partie

T.D.

Exercice 1

1. On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ défini comme $\langle (x,y,z) \mid (a,b,c) \rangle = xa + yb + zc$. On pose le vecteur $\vec{u} = (\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z})$ et $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{\sqrt{y}}, \frac{1}{\sqrt{z}}\right)$. De l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a
$$|\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle| \leqslant \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|.$$
Or, $\langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle = 3$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x+y+z}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$. D'où, comme la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante,
$$9 = 3^2 \leqslant (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right).$$
Il n'y a égalité que si u et v sont colinéaires, *i.e.* $u = \lambda v$:
$$u = \lambda v \iff \begin{cases} \sqrt{x} = \lambda \frac{1}{\sqrt{x}} \\ \sqrt{y} = \lambda \frac{1}{\sqrt{y}} \\ \sqrt{z} = \lambda \frac{1}{\sqrt{z}} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \iff x = y = z.$$

2. On se place dans $\mathcal{C}^0([a,b])$ muni de son produit scalaire canonique. On pose $u : x \mapsto \sqrt{f(x)}$ et $v : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$|\langle u \mid v \rangle| \leqslant \|u\|\,\|v\|.$$
Et, $\langle u \mid v \rangle = \int_a^b \mathrm{d}t = b - a$, $\|u\|^2 = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\|v\|^2 = \int_a^b \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t$. D'où, par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$,
$$(b-a)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) \times \left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t\right).$$
Il y a égalité si u et v sont colinéaires, *i.e.* $u = \lambda v$, *i.e.* $\forall t \in [a,b]$, $\sqrt{f(t)} = \frac{1}{\sqrt{f(t)}}$, *i.e.* $f(t) = \lambda$, *i.e.* f est constante.

Exercice 7

D'une part, on a
$$\langle A(X) \mid X\,A(X) \rangle = h(X\,A(X)) = (X\,A(X))(0) = 0.$$
Et, d'autre part,
$$\langle A(X) \mid X\,A(X) \rangle = \int_0^1 t\,A^2(t)\,\mathrm{d}t.$$
Or, comme la fonction $f : t \mapsto tA^2(t)$ est continue et positive, et que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors $\forall t \in [0,1]$, $f(t) = 0$. Le polynôme A a donc une infinité de racines, il s'agit du polynôme nul.

Ceci est un *contre-exemple* au théorème de Riesz.