Chapitre 8

Intégrale

Hugo Salou MPI*
Dernière mise à jour le 1er décembre 2022

Première partie
Cours

Il ne pas confondre les deux intégrales $\int_7^x f(t)\ \mathrm{d}t = F(x)$ (la fonction $F : x \mapsto F(x)$ une primitive[1] de la fonction f, si f est continue) et $\int_7^{+\infty} g(x,t)\ \mathrm{d}t = G(x)$ si l'intégrale converge (c'est une *intégrale à paramètre*, où le paramètre est x et la variable est t).

1 Continuité

Théorème 1:
Soient X et T deux intervalles de $\mathbb{R}$, et soit $f : X \times T \to \mathbb{R}$. Si

1. pour chaque $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur X ;
2. pour chaque $x \in X$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur T ;
3. il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable[2] sur T telle que
$$\forall (x,t) \in X \times T,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t),$$

alors la fonction $\displaystyle\int_T f(x,t)\ \mathrm{d}t$ est continue sur X.

Démonstration (théorème de la convergence dominée & caractérisation séquentielle de la limite):
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans X quelconque tendant, quand $n \to \infty$, vers un réel $a \in X$. Soit alors la fonction

$$\begin{aligned} h_n : T &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(u_n, t). \end{aligned}$$

Soit $t \in T$, on a $h_n(t) = f(u_n,t) \longrightarrow f(a,t)$ quand $n \to \infty$, car la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur X (1.). Donc, la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction h définie comme

$$\begin{aligned} h : T &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(a, t). \end{aligned}$$

On a $|h_n(t)| = |f(u_n,t)| \leqslant \varphi(t)$, et φ est intégrable (3.). Ainsi, d'après le théorème de la convergence dominée,

$$\lim_{n\to\infty} \overbrace{\int_T h_n(t)\ \mathrm{d}t}^{g(u_n)} = \int_T \underbrace{\lim_{n\to\infty} h_n(t)}_{f(a,t)}\ \mathrm{d}x = \int_T f(a,t)\ \mathrm{d}t = g(a).$$

D'où, $g(u_n) \longrightarrow a$, quand $n \to \infty$. Ceci est vrai quelle que soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers a, donc par caractérisation de la limite, $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$. Ainsi, g est continue en a. Ceci étant vrai pour tout $a \in X$, on en déduit que g est continue sur X.

Exercice 2 (La fonction Gamma):

1. *Pour quelles valeurs du paramètre réel x, les intégrales impropres*
$$\Gamma_1(x) = \int_0^1 t^{x-1} \times \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t \qquad \textit{et} \qquad \Gamma_2(x) = \int_1^{+\infty} t^{x-1} \times \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$$
convergent-elles ?

1. F est dérivable et sa dérivée est $F' = f$, autrement dit : $\forall x,\ F'(x) = f(x)$.
2. *i.e.* l'intégrale $\int_T \varphi(t)\ \mathrm{d}t$ converge.

2. *Montrer que l'intégrale impropre*
$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \times \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$$
converge si, et seulement si $x > 0$.
3. *Monter que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$.*
4. *En déduire que $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
5. *En étudiant les fonctions Γ_1 et Γ_2, montrer que la fonction Γ est continue sur $]0, +\infty[$.*
6. *En déduire que, $\Gamma(x) \sim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$.*

1. L'intégrale $\Gamma_1(x)$ est impropre en 0. On a
$$t^{x-1} \times \underbrace{\mathrm{e}^{-t}}_{\longrightarrow 1} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$$
qui ne change pas de signe. Or, $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $1 - x < 1$ d'après le critère de Riemann, *i.e.* $x > 0$.
L'intégrale $\Gamma_2(x)$ est impropre en $+\infty$. Or, $t^{x-1} \times \mathrm{e}^{-t} = (t^{x-1}\mathrm{e}^{-t/2}) \times \mathrm{e}^{-t/2} = o_{t\to+\infty}(\mathrm{e}^{-t/2})$, et $\mathrm{e}^{-t/2}$ ne change pas de signe. Or, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t/2}\ \mathrm{d}x$. Donc, l'intégrale $\Gamma_2(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. L'intégrale $\Gamma(x)$ converge si et seulement si les deux intégrales $\Gamma_1(x)$ et $\Gamma_2(x)$ convergent, donc si et seulement si $x > 0$.
3. Soit $x > 0$. On a $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$. Ainsi, soient $y \in]0, 1]$, et
$$f(y) = \int_y^1 t^x \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = \left[-t^x \cdot \mathrm{e}^{-t}\right]_y^1 + x \int_y^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}x$$
par intégration par parties car $t \mapsto t^x$ est $\mathcal{C}^1$ et $t \mapsto -\mathrm{e}^{-t}$ est $\mathcal{C}^1$. Or, $y^x \cdot \mathrm{e}^{-y}$ tend vers 0 quand $y \to 0$, et $\int_y^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ tend vers $\Gamma_1(x)$, quand $y \to 0$. Donc,
$$\Gamma_1(x+1) = -\mathrm{e}^{-1} + x\Gamma_1(x).$$
De même, $\Gamma_2(x+1) = \mathrm{e}^{-1} + x\Gamma_2(x)$. On en déduit que
$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$
4. On a $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} t^{1-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = 1$. D'où, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$. Par récurrence, on en déduit que $\Gamma(n+1) = n!$, pour $n \in \mathbb{N}$.
5. On veut montrer que $\Gamma_1 : x \mapsto \Gamma_1(x)$, et $\Gamma_2 : x \mapsto \Gamma_2(x)$ sont continues. Soit $a > 0$. Soient $T =]0, 1]$, $X = [a, +\infty[$, et
$$\begin{aligned} f : X \times T &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto t^{x-1} \cdot \mathrm{e}^{-t} \end{aligned}$$
Ainsi, on a bien $\Gamma_1(x) = \int_T f(x, t)\ \mathrm{d}t$.
   — Pour tout $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur X. En effet, soit $t \in T$, on a $f(x, t) = t^{x-1} \cdot \mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{(x-1)\ln t} \cdot \mathrm{e}^{-t}$ qui est continue par continuité de l'exponentielle.
   (—) Pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur T.
   — Pour tout $t \in T$, et pour $x \in X$, $|f(x, t)| \leqslant t^{a-1} \cdot \mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$, et l'intégrale $\int_T \varphi(t)\ \mathrm{d}t$ converge. En effet, pour $x \in X$, et $t \in T$, $|f(x, t)| = t^{x-1} \cdot \mathrm{e}^{-t} \leqslant t^{a-1} \cdot \mathrm{e}^{-t}$, et l'intégrale $\int_T t^{a-1} \cdot \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ (car il s'agit de $\Gamma_1(a)$, et $a > 0$).

Donc, Γ_1 est continue sur $X = [a, +\infty[$. Ceci est vrai pour tout $a > 0$. On en déduit que Γ_1 est continue sur $]0, +\infty[$.
On procède de même pour montrer que $\Gamma_2 : x \mapsto \Gamma_2(x)$ est continue. Soit $b > 0$. Soient $T = [1, +\infty[$, $X =]0, b]$, et
$$\begin{aligned} f : X \times T &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto t^{x-1} \cdot \mathrm{e}^{-t} \end{aligned}$$
Ainsi, on a bien $\Gamma_2(x) = \int_T f(x, t)\ \mathrm{d}t$.

— Pour tout $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur X. En effet, soit $t \in T$, on a $f(x,t) = t^{x-1} \cdot \mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{(x-1)\ln t} \cdot \mathrm{e}^{-t}$ qui est continue par continuité de l'exponentielle. (De même que pour Γ_1.)

(—) Pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur T.

— Pour tout $t \in T$, et pour $x \in X$, $|f(x,t)| \leqslant t^{b-1} \cdot \mathrm{e}^{-t} = \psi(t)$, et l'intégrale $\int_T \psi(t)\, \mathrm{d}t$ converge (car il s'agit de $\Gamma_2(b)$ avec $b > 0$).

Donc, Γ_2 est continue sur $X =]0, b]$. Ceci est vrai pour tout $b > 0$. On en déduit que Γ_2 est continue sur $]0, +\infty[$. On en déduit que $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ est continue sur $]0, +\infty[$, comme somme de deux fonctions continue sur $]0, +\infty[$.

6. On veut montrer que $x\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{1/x} \longrightarrow 1$ quand $x \to 0^+$. Or, $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ d'après la question 3. Et, $x + 1 \longrightarrow 1$ quand $x \to 0^+$. Or, d'après la question 5., la fonction Γ est continue en 1. Donc, $\Gamma(x+1) \longrightarrow \Gamma(1)$. De plus, $\Gamma(1) = 0! = 1$ d'après la question 4. On en déduit que
$$x\Gamma(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1.$$

2 Dérivabilité

Dans le théorème suivant, on montre que, avec les hypothèses demandées,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_T f(x,t)\, \mathrm{d}t = \int_T \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, \mathrm{d}t.$$

Théorème 3:
Soient $X \subset \mathbb{R}$ et $T \subset \mathbb{R}$ deux intervalles, et soit $f : X \times T \to \mathbb{R}$. Si,

1. pour $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur X ;
2. pour $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable[3] sur T, et la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux ;
3. il existe une fonction intégrable φ continue par morceaux telle que $\forall (x,t) \in X \times T$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$,

alors, $g : x \mapsto \int_T f(x,t)\, \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et
$$g'(x) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x) = \int_T \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\, \mathrm{d}t.$$

Exercice 4 (La fonction Gamma – suite):

(a) Montrons que la fonction $\Gamma_1 : x \mapsto \int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$;

(b) Montrons que la fonction $\Gamma_2 : x \mapsto \int_1^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$;

(c) Donc, comme $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, alors Γ est de classe $\mathcal{C}^1$.

(a) Soit $a > 0$. Soient $T =]0, 1]$, $X = [a, +\infty[$ et $f(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$, pour $x \in X$ et $t \in T$.

1. Pour $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur X. En effet, soit $t \in T$. Comme $f(x,t) = \mathrm{e}^{(x-1)\ln t} \cdot \mathrm{e}^{t}$, et exp est $\mathcal{C}^\infty$, d'où $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$, et
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \ln t \cdot \mathrm{e}^{(x-1)\ln t} \cdot \mathrm{e}^{-t} = \ln t \cdot t^{x-1} \cdot \mathrm{e}^{-t}.$$
2. Pour $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est *cpm* et $\int_T |f(x,t)|\, \mathrm{d}t$ converge (*c.f.* exercice 2). Et, la fonction $t \mapsto \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)$ est *cpm*.

3. *i.e.* l'intégrale de cette fonction converge absolument.

3. $\forall t \in T$, $\forall x \in X$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant -\ln t \cdot t^{x-1} \cdot \mathrm{e}^{-t} \leqslant -\ln t \cdot t^{a-1} \cdot \mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$. Et, $\int_T \varphi(t)\ \mathrm{d}t$ converge. En effet,
$$(-\ln t) \cdot t^{a-1} = \underbrace{(-\ln t) \cdot t^{\varepsilon}}_{\longrightarrow 0} \cdot t^{a-\varepsilon-1} \cdot \mathrm{e}^{-t} = \underset{t \to 0^+}{o} \left(t^{a-\varepsilon-1}\right).$$
Or, l'intégrale $\int_T t^{(a-\varepsilon)-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ converge (car $a-\varepsilon > 0$), et elle vaut $\Gamma_1(a-\varepsilon)$. On en déduit que $\int_T \varphi(t)\ \mathrm{d}t$ converge.

Alors, Γ_1 est $\mathcal{C}^1$ sur X. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, on en On en déduit que Γ_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que
$$\forall x > 0,\ \Gamma_1'(x) = \int_T (\ln t) t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t.$$

(b) Soit $b > 0$. Soient $T = [1,+\infty[$, $X =]0,b]$ et $f(x,t) = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$, pour $x \in X$ et $t \in T$.

1. Pour $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur X. En effet, soit $t \in T$. Comme $f(x,t) = \mathrm{e}^{(x-1)\ln t} \cdot \mathrm{e}^{t}$, et exp est $\mathcal{C}^\infty$, d'où $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$, et
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \ln t \cdot \mathrm{e}^{(x-1)\ln t} \cdot \mathrm{e}^{-t} = \ln t \cdot t^{x-1} \cdot \mathrm{e}^{-t}.$$
2. Pour $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est *cpm* et $\int_T |f(x,t)|\ \mathrm{d}t$ converge (*c.f.* exercice 2). Et, la fonction $t \mapsto \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)$ est *cpm.*
3. $\forall t \in T$, $\forall x \in X$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant -\ln t \cdot t^{x-1} \cdot \mathrm{e}^{-t} \leqslant -\ln t \cdot t^{b-1} \cdot \mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$. Et, $\int_T \varphi(t)\ \mathrm{d}t$ converge. En effet,
$$\ln t \cdot t^{b-1} \cdot e^{-t} = (\ln t \cdot \mathrm{e}^{-t/3}) \cdot (t^{b-1} \cdot \mathrm{e}^{-t/3}) \cdot \mathrm{e}^{-t/3}.$$
Or, l'intégrale $\int_T \mathrm{e}^{-t/3}\ \mathrm{d}t$ converge. On en déduit que $\int_T \varphi(t)\ \mathrm{d}t$ converge.

Alors, Γ_2 est $\mathcal{C}^1$ sur X. Ceci étant vrai pour tout $b > 0$, on en On en déduit que Γ_2 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que
$$\forall x > 0,\ \Gamma_2'(x) = \int_T (\ln t) t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t.$$

Corollaire 5:
On peut appliquer le théorème plusieurs fois :

1. pour $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{C}^k$ sur X ;
2. pour $x \in X$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)$ est *cmp* et intégrable sur T pour tout $j \in [\![0,k-1]\!]$, et la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est *cmp* sur T.
3. il existe φ *cmp* et intégrable telle que $\forall x \in X$, $\forall t \in T$, $\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k} f(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$,

alors la fonction $g : x \mapsto \int_T f(x,t)\ \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et
$$\forall i \leqslant k, \quad g^{(i)}(x) = \int_T \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)\ \mathrm{d}t.$$

Rappel (théorème de Rolle):
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$. Ainsi,
$$\exists c \in]a,b[,\ f'(c) = 0.$$

Exercice 6 (La fonction Γ – fin): 1.

2. La fonction Γ est continue sur $[1,2]$, et dérivable sur $]1,2[$. En effet, Γ est $\mathcal{C}^1$ sur $[1,2]$. Or, $\Gamma(1) = 0! = 1 = 1! = \Gamma(2)$. Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $\alpha \in]1,2[$ tel que $\Gamma(\alpha) = 0$. De plus, Γ'' est strictement positive (*c.f.* raisonnent ci-après) donc Γ est strictement croissante, d'où Γ' est injective. On en déduit que α est unique. En effet, par l'absurde : si l'intégrale de la fonction est nulle et que la fonction est continue et ne change pas de signes, alors la fonction est nulle. $\lightning$

3.

x	0	1	α	$+\infty$
$\Gamma'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$
$\Gamma(x)$	$\Vert$	$\searrow$	$\Gamma(\alpha)$	$\nearrow$

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$. D'où, $\Gamma(n) \longrightarrow +\infty$ quand $n \to +\infty$. De plus, Γ est monotone (car strictement croissante) sur $[2, +\infty[$, donc $\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x)$ existe. Par unicité de la limite,

$$\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \Gamma(n) = +\infty.$$

4. D'après la formule de Stirling,

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

Et, pour $x > 0$, $\Gamma(\lfloor x \rfloor)/x^k \leqslant \Gamma(x)/x^k$. Or, $\Gamma(\lfloor x \rfloor) = (\lfloor x \rfloor - 1)! \sim_{x\to+\infty} \sqrt{2\pi n(x)}\left(\frac{n(x)}{\mathrm{e}}\right)^{n(x)}$ où $n(x) = \lfloor x \rfloor - 1$. D'où,

$$\frac{\Gamma(\lfloor x \rfloor)}{x^k} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi n(x)}\left(\frac{n(x)}{\mathrm{e}}\right)^{n(x)}}{x^k} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

Deuxième partie
T.D.

Exercice 3

1. On a $F(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^0}{1+t^2}\ \mathrm{d}t = \left[\operatorname{Arctan} t\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$, et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leqslant F(x) \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0,$$
d'où, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.
2. On pose $X = \mathbb{R}$, $T = [0,1]$ et
$$\begin{aligned} f : X \times T &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) &\longmapsto \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}. \end{aligned}$$
   — Soit $t \in T$. La fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur X comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

   — Soit $x \in X$. La fonction $f_x : t \mapsto f(x,t)$ est continue comme composée de fonctions continues. De plus, l'intégrale $\int_T f(x,t)\ \mathrm{d}t$ n'est pas impropre, la fonction f_x est donc intégrable. Également, on calcule
$$\forall t, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2x\frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} = -2x\ f(x,t).$$
   La fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur T.

   — On pose la fonction $\varphi : t \mapsto 2\sqrt{2}\frac{\mathrm{e}^{-2(1+t^2)}}{1+t^2}$, qui est continue par morceaux sur T, et on a
$$\forall t,\ \forall x, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = 2\ |x|\ f(x,t) \leqslant \varphi(t).$$
   En effet, on calcule
$$\forall x > 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|(x,t) = 2f(x,t) - 4x^2 f(x,t) = -2(x^2-2)\cdot f(x,t),$$
   qui s'annule seulement pour $x = \sqrt{2}$ (car on a choisit $x > 0$), et il s'agit d'un maximum. Comme la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est paire, il s'agit d'un maximum global sur $\mathbb{R}$. C'est pour cela que $\varphi(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{2},t)$. De plus, la fonction φ est intégrable, car l'intégrale $\int_T \varphi(t)\ \mathrm{d}t$ n'est pas impropre.

$$\begin{aligned} F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_T f(x,t)\ \mathrm{d}t &= \int_T \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (-2x)f(x,t)\ \mathrm{d}t \\ &= -2x\int_0^1 f(x,t)\ \mathrm{d}t \\ &= -2x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2-x^2t^2}\ \mathrm{d}t \\ &= -2x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2t^2}\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

3. La fonction G est une primitive de la fonction $xt \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$, qui est continue. On en déduit, d'après le théorème fondamentale de l'algèbre, que G est dérivable (sur $\mathbb{R}$). On a

$$\begin{aligned}(G^2)'(x) &= -2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1 x\mathrm{e}^{-u^2x^2}\,\mathrm{d}u \text{ avec le } \textit{cdv } ut = x \\ &= F'(x)\end{aligned}$$

4. On a $G(0) = 0$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \forall t \in [1, x],\ 0 \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

Donc, par croissance de l'intégrale,

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leqslant \int_1^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = G(x) \leqslant \int_1^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Or, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, et l'intégrale $\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ n'est pas impropre, la fonction G est donc majorée. Et, la fonction G est croissante. On en déduit que la fonction G converge en $+\infty$.

5. En primitivant la relation de la question 3, on trouve

$$G^2(x) = -F(x) + K \quad \text{où} \quad K \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, en passant à la limite, on a donc

$$G^2(x) + F(x) = K \xrightarrow[x\to+\infty]{} K = \lim_{x\to+\infty} G^2(x).$$

On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} G(x) = \sqrt{K}$. Calculons K : on a $K = G^2(0) + F(0) = \frac{\pi}{4}$. On en déduit que

$$G(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} G(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 4

1. On a, pour $t \in \mathbb{R}^*$, $0 \leqslant |h(t)| = \frac{|\sin t|}{|t|}$. Soit $t \in \mathbb{R}^*$. Si $|t| \leqslant 1$, alors $|\sin t| = \sin|t| \leqslant |t|$ et donc $|h(t)| \leqslant 1$. Si $|t| \geqslant 1$, alors $|\sin t| \leqslant 1$, et donc $|h(t)| \leqslant \frac{1}{|t|} \leqslant 1$. On en déduit que la fonction $|h|$ est majorée par 1 sur $\mathbb{R}^*$.

2. Soit $x > 0$. L'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{e}^{-xt}\right|\,\mathrm{d}t$ est impropre en 0 ET en $+\infty$. L'intégrale I converge si, et seulement si les intégrales $A = \int_0^1 \left|\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{e}^{-xt}\right|\,\mathrm{d}t$ et $B = \int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{e}^{-xt}\right|\,\mathrm{d}t$ convergent.
   - D'après la question précédente, $0 \leqslant \left|\frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-xk}\right| \leqslant \left|\mathrm{e}^{-xt}\right| = \mathrm{e}^{-xt}$. Et l'intégrale $\int_0^1 \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ converge car $x > 0$. On en déduit que A converge.
   - De même, $0 \leqslant \left|\frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-xk}\right| \leqslant \left|\mathrm{e}^{-xt}\right| = \mathrm{e}^{-xt}$. Et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ converge car $x > 0$.On en déduit que B converge.

   Ainsi, l'intégrale I converge. On a montré que

$$I = \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{e}^{-xt}\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}.$$

   On a donc bien $I \leqslant \frac{1}{x}$.

3. L'intégrale de DIRICHLET converge si et seulement si les intégrales $U = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$ et $V = \int_0^1 \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$ convergent.
   - On a $\forall t \in [0,1]$, $0 \leqslant \frac{\sin t}{t} \leqslant 1$, et l'intégrale $\int_0^1 \mathrm{d}t$ converge. Ainsi, V converge.
   - On fait une intégration par parties :
   $$\begin{aligned} 0 \leqslant U = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t &= \left[\frac{-\cos t}{t^2} \right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{-\cos t}{t^2} \, \mathrm{d}t \\ &= -\cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{-\cos t}{t^2} \, \mathrm{d}t, \end{aligned}$$
   et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{-\cos t}{t^2} \, \mathrm{d}t$ converge absolument. On en déduit que l'intégrale V converge.

   On en déduit que l'intégrale de DIRICHLET converge.
4. On pose $X =]0, +\infty[$, $T =]0, +\infty[$ et
   $$\begin{aligned} f : X \times T &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) &\longmapsto \frac{\sin t}{t} \mathrm{e}^{-xt}. \end{aligned}$$
   - Soit $t \in T$. La fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ car la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^1$.
   - Soit $x \in X$. La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux, et elle est intégrable sur T d'après la question 2 (l'intégrale $\int_T \frac{\sin t}{t} \mathrm{e}^{-kt} \, \mathrm{d}t$ converge absolument). De plus, on calcule
   $$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin t \, \mathrm{e}^{-xt},$$
   qui est continue sur T.