Chapitre 6

Série

Hugo Salou MPI*
Dernière mise à jour le 14 novembre 2022

Première partie
Cours

1 Trois manières de converger

1.1 Convergence simple et convergence uniforme

Rappel (Suites et séries numériques):
Les suites (u_n) et les séries $\sum u_n$ ont une nature mais pas de valeurs. Les valeurs u_n et $\sum_{k=0}^{n} u_k$ sont respectivement le n-ième terme de la suite, et la somme partielle de la série. Le reste $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ est défini que si la série $\sum u_n$, et il tend vers 0. La somme $\sum_{k=0}^{\infty}$ est définie si la série $\sum u_n$ converge.

Nous avons vu au chapitre précédent les suites de fonctions, et les deux types de convergence : simple et uniforme. Dans ce chapitre, on s'intéresse aux séries de fonctions. Mais, au lieu de deux méthodes de convergence, il y en a trois pour les séries : normale, simple et uniforme. On a

$$\text{convergence simple} \quad \overset{\Longleftarrow}{\not\Longrightarrow} \quad \text{convergence uniforme} \quad \overset{\Longleftarrow}{\not\Longrightarrow} \quad \text{convergence normale.}$$

Attention : les théorèmes sur les séries numériques NE SONT PAS, en général, VRAIS pour les séries de fonctions.

Rappel:
La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f si, et seulement si

$$\forall x, \qquad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x).$$

Et, elle converge uniformément vers f si, et seulement si

$$\sup_{x\in I} \left|f_n(x) - f(x)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Définition 1:
La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers la fonction S si

$$\forall x, \quad S_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} S(x), \quad \text{où} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

De même que pour les suites, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers la fonction S si

$$\sup_{x\in I} \left|S_n(x) - S(x)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Remarque 2:
On pose des notations similaires que pour les séries numériques pour la somme et pour le reste.

Méthode 3:

$$\begin{aligned} &\text{la série de fonctions } \textstyle\sum f_n \text{ converge uniformément sur } I \text{ vers la fonction } S \\ \iff &\text{le reste } R_n \text{ (fonction) converge uniformément vers } \tilde{0} \text{ (fonction nulle)} \\ \implies &\text{la suite de fonctions } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } \tilde{0} \text{ (fonction nulle).} \end{aligned}$$

Preuve:
On sait que, par définition, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers S sur I si et seulement si $\sup_{x\in I} \left|S_n(x) - S(x)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Or, $\forall x \in I$, $S(x) - S_n(x) = R_n(x)$. D'où, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers S sur I si et seulement si $\sup_{x\in I} \left|R_n(x)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc si et seulement si (par définition), la suite de fonctions

$(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0. À présent, on veut montrer que $\sup_{x\in I} |f_n(x)| \longrightarrow 0$. Or, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in I$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$, et donc $f_n(x) = R_{n-1}(x) - R_n(x)$. D'où $\left|f_n(x)\right| \leqslant \left|R_{n-1}(x)\right| + \left|R_n(x)\right|$. Attention, on ne peut pas passer au sup directement. Or, $\left|R_{n-1}(x) - R_n(x)\right| \leqslant \sup_{x\in I} \left|R_{n-1}(x)\right| + \sup_{x\in I} \left|R_n(x)\right|$, qui est un majorant. D'où, $0 \leqslant \sup_{x\in I} |f_n(x)| \leqslant \sup_{x\in I} \left|R_{n-1}(x)\right| + \sup_{x\in I} \left|R_n(x)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Donc, par théorème d'existence de la limite par encadrement, $\sup_{x\in I} |f_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Exercice 4:
Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = x^n$. Montrer que

1. *la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$ vers la fonction $S : x \mapsto \frac{1}{1-x}$;*
2. *elle ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$;*
3. *elle converge uniformément sur tout segment inclus dans $]-1,1[$.*

1. Soit $x \in\,]-1,1[$. On veut montrer que la série numérique $\sum f_n(x)$ converge vers le réel $\frac{1}{1-x}$. On calcule
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + \cdots + x^n &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \text{ car } x \neq 1 \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-x} \text{ car } |x| < 1.\end{aligned}$$

2. 1ère manière On va montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle :
$$\sup_{x\in\,]-1,1[} \left|f_n(x) - 0\right| \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0.$$
On a, pour $x \in\,]-1,1[$, $|f_n(x) - 0| = |x^n|$. Or, $\sup_{x\in\,]-1,1[} |x^n| = 1 \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$. D'où, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle. Ainsi, d'après la méthode 4, la série $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$.
2nde manière La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers S sur $]-1,1[$ si, et seulement si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers S, donc si, et seulement si $\sup_{x\in\,]-1,1[} \left|S_n(x) - S(x)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. On calcule
$$\forall n,\ \forall x \in\,]-1,1[,\quad \left|S_n(x) - S(x)\right| = \left|\frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{1-x}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x}.$$
D'où,
$$\sup_{x\in\,]-1,1[} \frac{|x|^{n+1}}{1-x} = +\infty \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0.$$
La série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$.
3ème manière On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in\,]-1,1[$, $\left|S_n(x) - S(x)\right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Montrons que $S_n(u_n) - S(u_n) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$. On calcule
$$\left|S_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) - S\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right| = \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)} = (n+1) \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$
Or, $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \mathrm{e}^{(n+1)\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}$. Et,
$$(n+1)\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = (n+1)\left(\frac{-1}{n+1} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right) = -1 + o(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} -1.$$
Ainsi, $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \longrightarrow \mathrm{e}^{-1}$ par continuité de la fonction exponentielle. Et donc, $S_n(u_n) - S(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ car $n+1 \longrightarrow +\infty$ et $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \longrightarrow \mathrm{e}^{-1}$. Or, $\sup_{x\in\,]-1,1[} \left|S_n(x) - S(x)\right| \geqslant \left|S_n(u_n) - S(u_n)\right|$, et d'où $\sup_{x\in\,]-1,1[} \left|S_n(x) - S(x)\right| \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

3. On considère l'intervalle $[\alpha,\beta] \subset]-1,1[$. Sans perte de généralité, on choisit un segment $[-a,a]$ avec $0<a<1$. On veut montrer que $\sup_{x\in[-a,a]} \left|S_n(x)-S(x)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. On calcule
$$\forall x \in [-a,a],\ 0 \leqslant \left|S_n(x)-S(x)\right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \leqslant \frac{a^{n+1}}{1-a},$$
qui est un majorant. D'où, $0 \leqslant \sup_{x\in[-a,a]} \left|S_n(x)-S(x)\right| \leqslant \frac{a^{n+1}}{1-a} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ car $|a|<1$. Donc, d'après le théorème d'existence de la limite par encadrement,
$$\sup_{x\in[-a,a]} \left|S_n(x)-S(x)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

1.2 Convergence normale

Définition 5:
On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ *converge normalement* sur $I \subset \mathbb{R}$ s'il existe une suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $\forall n$, $\forall x$, $|f_n(x)| \leqslant u_n$, et que la série (numérique) des $\sum u_n$ converge.

Proposition 6:
La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement si, et seulement si la série numérique $\sum \sup |f_n|$ converge.

Preuve: " $\Longleftarrow$ " Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sup_{x\in I} |f_n(x)|$. Alors $u_n \geqslant |f_n(x)|$, $\forall x$. D'où, comme la série $\sum u_n$ converge, alors $\sum f_n$ converge normalement.
" $\Longrightarrow$ " $\sup_{x\in I} |f_n(x)|$ est un majorant, et c'est le plus petit. D'où, $\sup_{x\in I} |f_n(x)|$, qui est un majorant. Or, $\sum u_n$ converge, donc $\sum \sup_{x\in I} |f_n(x)|$.

Proposition 7:
On a
$$\text{convergence simple} \ \underset{\not\Longrightarrow}{\Longleftarrow}\ \text{convergence uniforme} \ \underset{\not\Longrightarrow}{\Longleftarrow}\ \text{convergence normale.}.$$

Preuve:
Montrons convergence normale $\Longrightarrow$ convergence uniforme. Les autres cas ont déjà été traités au chapitre précédent. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dont la série $\sum f_n$ converge normalement. Montrons que la série de fonctions converge uniformément, *i.e.*, $\sup_{x\in I} |R_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Comme la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n$, $\forall x$, $|f_n(x)| \leqslant u_n$, et la série numérique $\sum u_n$ converge. On calcule
$$\left|R_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} u_n,$$
qui est un majorant. ($R_n(x)$ existe car la série de réels $\sum f_n(x)$ converge car $\sum |f_n(x)|$ converge car $|f_n(x)| \leqslant u_n$, et $\sum u_n$ converge. Également, le reste $\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)|$ existe car la série numérique $\sum |f_k(x)|$ converge.) D'où, $0 \leqslant \sup_{x\in I} |R_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$, qui tend vers 0 car tout reste d'une série numérique convergente tend vers 0. D'après le théorème d'existence de la limite par encadrement, $\sup_{x\in I} |R_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Exercice 8:
Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction
$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{(-1)^n}{n+x^2}.$$
Montrer que

1. *la série des fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$*
2. *elle ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$*
3. *elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$*

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La série numérique $\sum f_n(x)$ est une série alternée. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n+x^2}$. Cette suite tend vers 0 et est décroissante ($u_{n+1} \leqslant u_n$). D'où, d'après le théorème des séries alternées, la série numérique $\sum (-1)^n u_n$ converge. Ainsi, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

2. La convergence n'est pas normal car $|f_n(x)| = \frac{1}{n+x^2}$. Or, $\sum |f_n(x)| = \sum \frac{1}{n+x^2}$ diverge car $\frac{1}{n+x^2} \sim \frac{1}{n}$ qui ne change pas de signe, et $\sum \frac{1}{n}$ par critère de Riemann. Donc, la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement.
3. La convergence est uniforme car la suite des restes $\big(R_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0. On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1} \frac{(-1)^n}{k+x^2}$. On veut montrer que $\sup_{x\in\mathbb{R}} |R_n(x)| \longrightarrow 0$. On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1+x^2} \leqslant \frac{1}{n+1}$, qui est un majorant. D'où, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1}$, qui tend vers 0. D'après le théorème d'existence de la limite par encadrement, $\sup_{x\in\mathbb{R}} |R_n(x)|$ tend vers 0.

2 Continuité

Théorème 9:
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, une fonction f_n continue en a. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I vers une fonction S, alors S est aussi continue en a.

Preuve:
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, la somme partielle $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$. Comme chaque fonction f_n est continue, alors S_n est continue. Or, comme la série de fonctions converge uniformément, on en déduit que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément. Donc, par transmission de la continuité par convergence uniforme, la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^\infty f_n(x)$ est continue.

Corollaire 10:
Une série de fonctions continue uniformément convergente, converge vers une fonction continue.

Exercice 11:
Soit la série de fonctions $\sum x^n(1-x)$. (Soit $\forall n$, $\forall x$, $f_n(x) = x^n(1-x)$.) *Montrons que* $\sum f_n$ *converge simplement mais pas uniformément.*

Soit $x \in [0,1]$. La série numérique $\sum f_n(x) = \sum x^n(1-x) = (1-x)\sum x^n$ converge car, si $x \in [0,1[$, alors $\sum x^n$ converge, et si $x = 1$, alors $\sum x^n(1-x) = \sum 0$ qui converge. Donc $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

Mais, chaque fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est continue (c'est un polynôme), tandis que la somme ne l'est pas. En effet,

$$\forall x \in [0,1], \quad S(x) = \sum_{n=0}^\infty f_n(x) = \sum_{n=0}^\infty x^n(1-x).$$

Or, si $x = 1$, alors $S(x) = 0$. Et, si $x \neq 1$, $\sum_{k=0}^\infty x^n(1-x) = (1-x)\sum_{k=0}^\infty = (1-x)\cdot\frac{1}{1-x} = 1$. La fonction S n'est pas continue. Donc la convergence n'est pas uniforme.

Théorème 12 (double-limite/interversion somme-limite):
Soit une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I et soit $a \in \bar{\mathbb{R}}$, une extrémité de I. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I, vers une fonction S et si chaque fonction f_n admet une limite finie b_n en a, alors la série numérique $\sum b_n$ converge et $\lim_{x\to a} S(x) = \sum_{n=0}^\infty b_n$. Autrement dit,

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=0}^\infty f_n(x) = \sum_{n=0}^\infty \lim_{x\to a} f_n(x).$$

Preuve:
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I. Également, on a $S_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{k=0}^n b_j$, car c'est une somme finie de limites. D'où, d'après le théorème de la double-limite pour les suites de fonctions (théorème 9 du chapitre précédent), on a

$$\lim_{x\to a} \underbrace{\lim_{n\to\infty} S_n(x)}_{\sum_{k=0}^\infty f_k(x)} = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} S_n(x).$$

Aussi, $\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{x\to a}\sum_{k=0}^n f_k(x)\Big)$. Or, comme la somme $\sum_{k=0}^n f_k(x)$

est finie, et que *la limite d'une somme finie est la somme des limites*, on a donc

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\lim_{x\to a} f_k(x)\Big) = \sum_{k=0}^{\infty}\lim_{x\to a} f_k(x).$$

Exercice 13:
On pose la fonction S définie par

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x^2}. \end{aligned}$$

Montrer, de deux manières, que $\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$.

On a déjà montré, dans l'exercice 8, que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément en notant $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x^2}$. D'une part, la série de fonctions converge uniformément sur $]-\infty,+\infty[$. D'autre part, $\forall n$, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0 \in \mathbb{R}$. D'où, d'après le théorème d'interversion somme-limite,

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

Autre méthode (sans le théorème d'interversion somme-limite, avec le théorème des séries alternées) : on a montré dans l'exercice 8, que $\frac{1}{n+x^2}$ tend vers 0 (quand $n\to\infty$) en décroissant, donc, d'après le théorème des séries alternées, la série numérique $\sum\frac{(-1)^n}{n+x^2}$ converge. De plus, encore d'après le TSA,

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad -\frac{1}{1+x^2} \leqslant S(x) \leqslant -\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2+x^2}.$$

Or, $-\frac{1}{1+x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \xleftarrow[x\to+\infty]{} -\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2+x^2}$. Donc, d'après le théorème d'existence de la limite par encadrement, $S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

3 Intégrer

Théorème 14:
Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un segment $[a,b]$. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers S, alors S est continue sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b S(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t.$$

Preuve:
On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. Comme la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$. Aussi, chaque fonction S_n est continue (car c'est une somme finie de fonctions continues). D'où, d'après le théorème d'interversion somme-intégrale (pour les suites de fonctions), on a

$$\int_a^b \underbrace{\lim_{n\to\infty} S_n(x)}_{\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)}\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\ \mathrm{d}x.$$

Or, comme la somme $S_n(x)$ est finie, on peut intervertir somme et intégrale : $\lim_{n\to\infty}\int_a^b\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_a^b f_k(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b f_k(x)\ \mathrm{d}x$.

Ce théorème s'appelle le *théorème d'intégration terme à terme*. Ceci rappelle le théorème d'intégration terme à terme pour les développements limités : si $f(x) = a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\mathcal{o}(x^n)$, alors

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t &= \int_0^x \big(a_0+a_1x+\cdots+a_nt^n+\mathcal{o}(t^n)\big)\ \mathrm{d}t \\ &= a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+\cdots a_n\frac{t^{n+1}}{n+1}+\mathcal{o}(x^{n+1}).\end{aligned}$$

Exercice 15:
Soit $x \in]-1,1[$. On pose, pour tout n, $f_n(t) = t^n$ continue. La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur le segment $[0,x]$ (ou $[x,0]$ si $x < 0$), car elle converge normalement sur $[0,x]$. En effet, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0,x] \cup [x,0]$, $|f_n(t)| \leqslant |x|^n$ qui ne dépend pas de t. Et, la série numérique $\sum |x|^n$ converge car c'est une série géométrique de raison $|x| \in]-1,1[$. D'où, on peut intégrer $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^n$ terme à terme :

$$-\ln(1-x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Théorème 16 (intégration terme-à-terme sur un intervalle quelconque):
Soit I un intervalle, et soit une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I. Si

1. la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction S continue par morceaux sur I ;
2. la série de réels $\sum \int_I |f_n(t)|\, \mathrm{d}t$ converge,

alors S est intégrable et

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_I f_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_I S(t)\, \mathrm{d}t.$$

Ce théorème est admis, et la preuve n'utilise pas le théorème de la convergence dominée.

Exercice 17:
Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\, \mathrm{d}x$ *est convergente, et qu'elle vaut* $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\, \mathrm{d}x$ est impropre. Elle converge si et seulement si les deux intégrales $I = \int_0^1 \frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\, \mathrm{d}x$ converge et $J = \int_1^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\, \mathrm{d}x$ converge. On a $\frac{x}{\mathrm{e}^x-1} \sim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = \frac{x}{\mathrm{e}^{x/2}} \times \frac{1}{\mathrm{e}^{x/2}} = o(\mathrm{e}^{-x/2})$, et $\mathrm{e}^{-x/2}$ ne change pas de signe. Or, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x/2}\, \mathrm{d}x$ converge, d'où J aussi. On a $\mathrm{e}^x = 1 + x + o_{x\to 0}(x)$, d'où $\mathrm{e}^x - 1 = x + o(x) \sim_{x\to o} x$. Donc, $\frac{x}{\mathrm{e}^x-1} \sim_{x\to 0} 1$ d'où, $\frac{x}{\mathrm{e}^x-1} \longrightarrow 1$, donc l'intégrale I est faussement impropre en 0, donc convergente.

Calculons sa valeur. On a $x/(\mathrm{e}^x - 1) = x\mathrm{e}^{-x}/(1-\mathrm{e}^{-x})$, et $\mathrm{e}^{-x}/(1-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}(\mathrm{e}^{-x})^k$ pour tout $x \in]0,+\infty[$, car la série $\sum(\mathrm{e}^{-x})^k$ est une série géométrique dont la raison e^{-x}, en valeur absolue, est strictement inférieure à 1. D'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} x\mathrm{e}^{-x}\Big)\, \mathrm{d}x.$$

En effet, on calcule l'intégrale suivante à l'aide d'une intégration par parties :

$$\int_0^y x\,\mathrm{e}^{-kx}\, \mathrm{d}x = \left[-\frac{x\mathrm{e}^{-kx}}{k}\right]_0^y - \int_0^y \Big(-\frac{1}{k}\mathrm{e}^{-kx}\Big)\, \mathrm{d}x \xrightarrow[y\to+\infty]{} -\frac{1}{k^2}.$$

On vérifie à présent les hypothèses d'intégration terme-à-terme sur un intervalle quelconque. Chaque fonction

$$\begin{aligned} f_k :]0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x\mathrm{e}^{-kx} \end{aligned}$$

est intégrable sur $]0,+\infty[$ car $\int_0^{+\infty} |f_k(x)|\, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-kx}\, \mathrm{d}x$ qui converge (en *coupant l'exponentielle en deux*). La série de fonctions $\sum f_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ car, soit $x > 0$, $\sum f_k(x) = \sum x\mathrm{e}^{-kx}$ converge (en *coupant l'exponentielle en deux*). La série numérique $\sum \int_{\mathbb{R}_*^+} |f_k(t)|\, \mathrm{d}t$ converge car $\sum \frac{1}{k^2}$ converge.

4 Dériver

Théorème 18 (dérivation terme à terme):
Si toute fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$, que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[a,b]$, et que la série de fonctions $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x).$$

Preuve:
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$. La suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction S. Et, la suite de fonctions $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers S'. Donc, d'après le théorème d'interversion dérivée-limite, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \underbrace{\lim_{n\to\infty} S_n(x)}_{\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} S_n(x).$$

Et, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)$ car c'est une somme finie. D'où,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x).$$

Deuxième partie

T.D.