Chapitre 5

Suite

Hugo Salou MPI*
Dernière mise à jour le 6 novembre 2022

Première partie

Cours

1 Deux manières de converger

Définition 1:
Soit T une partie de $\mathbb{R}$. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : T \to \mathbb{R}$, une fonction. Soit également une fonction $f : T \to \mathbb{R}$. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

1. *converge simplement* sur T vers f, si $\forall t \in T,\ f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(t)$;
2. *converge uniformément* sur T vers f, si $\sup_{t\in T} |f_n(t) - f(t)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Si une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f. Mais, la réciproque est fausse :

$$\boxed{\text{convergence uniforme} \quad \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \quad \text{convergence simple.}}$$

Exercice 2:
On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$\begin{aligned} f_n : \overbrace{[0,1]}^{T} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto t^n. \end{aligned}$$

Soit $t \in [0,1]$. Alors,

$$f_n(t) = t^n \xrightarrow[t\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0,1[\\ 1 & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

D'où la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f définie ci-dessous :

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0,1[, \\ 1 & \text{si } t = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Cette convergence n'est pas uniforme car, comme $\sup_{t\in[0,1]} f_n(t) = 1$, d'où $\sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| = 1 \mathrel{\not\xrightarrow[n\to+\infty]{}} 0$.

⚠ Méthode

$2^{\text{ème}}$ méthode : montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément. soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels définis, pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 - \frac{1}{n}$, qui converge vers 1 en $+\infty$. Alors,

$$f_n(u_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}^{n\times\left(-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \mathrm{e}^{-1+o(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1}.$$

D'où, $f(u_n) - f(u_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - 0 \mathrel{\not\xrightarrow[n\to+\infty]{}} 0$. Or, $\sup |f_n - f| \geqslant |f_n(u_n) - f(u_n)|$. D'où $\sup |f_n - f| \mathrel{\not\xrightarrow[n\to+\infty]{}} 0$.

Soit $a \in [0,1[$. Mais, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,a]$: en effet, montrons que

$$\sup_{t\in[0,a]} |f_n(t) - f(t)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{aussi noté} \qquad \sup_{[0,a]} |f_n - f| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Calculons $|f_n(t) - f(t)| = |f_n(t) - 0| = |t^n| \leqslant a^n$. D'où a^n est un majorant. Ainsi, par définition de la borne supérieure,[1] $\sup_{[0,a]} |f_n - f| \leqslant a^n$. Or, $\sup_{[0,a]} |f_n - f| \geqslant 0$, et donc, d'après le théorème d'existence de la limite par encadrement,

$$\sup_{t\in[0,a]} |f_n(t) - f(t)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

1. La borne supérieure est définie comme le plus petit majorant.

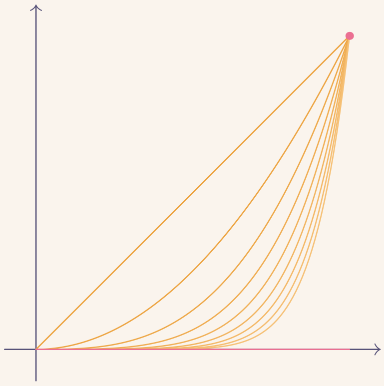

Figure 1 – Convergence de la suite de fonctions $(t^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Remarque 3 (sert rarement sauf pour prouver le théorème 6):

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur T vers f si et seulement si

$$\forall t \in T,\ \forall \varepsilon > 0,\ \overbrace{\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \ |f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon}^{\text{« à partir d'un certain rang »}}.$$

Ici, le N dépend de t et de ε.

2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur T vers f si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \forall t \in T,\ \ |f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon.$$

Ici, le N ne dépend que de ε et pas de t : le même N convient pour tous les t.

Exercice 4:

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } f \text{ sur } [0,1] \overset{\text{def.}}{\iff} \forall x \in [0,1],\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

Or, si $x \in \,]0,1]$, alors $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car, à partir d'un certain rang N, $\forall n \geqslant N$, $f_n(x) = 0$; et, si $x = 0$, $f_n(x) = f_n(0) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Soit ainsi

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Alors, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction f.

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f \overset{\text{def.}}{\iff} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Or, $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Soit $x \in [0,1]$. Si $x = 0$, alors $f_n(x) = f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$; si $x \in \,]0,1]$, alors $f_n(x) = 0$ à partir d'un certain rang, et donc $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'où la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle. Mais, la convergence n'est pas uniforme :

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = 2n + 2 \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

2 Continuité

Exemple 5:
Dans l'exercice 2, chaque fonction $f_n : t \mapsto t^n$ est continue sur $[0,1]$ mais la limite f n'est pas continue sur $[0,1]$ (car elle n'est pas continue en 1).

Théorème 6:
Soit a un réel dans un intervalle T de $\mathbb{R}$. Si une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continues en a converge uniformément sur T vers une fonction f, alors f est aussi continue en a.

Preuve:
On suppose les fonctions f_n continues en a ($f_n(x) \longrightarrow f_n(a)$) et que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f ($\sup |f_n - f| \longrightarrow 0$). On veut montrer que f est continue en a : $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in T, \quad |x-a| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On calcule

$$\big|f(x) - f(a)\big| \leqslant \big|f(x) - f_n(x)\big| + \big|f_n(x) - f_n(a)\big| + \big|f_n(a) - f(a)\big|$$

par inégalité triangulaire. Or, par hypothèse, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ (qui ne dépend pas de x ou de a), tel que, $\forall n \geqslant N$, $\big|f(x) - f_n(x)\big| \leqslant \frac{1}{3}\varepsilon$, et $\big|f_n(a) - f(a)\big| \leqslant \frac{1}{3}\varepsilon$. De plus, par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que si $|x-a| \leqslant \delta$, alors $|f_n(x) - f_n(a)| \leqslant \frac{1}{3}\varepsilon$.[2] On en déduit que $\big|f(x) - f(a)\big| \leqslant \varepsilon$.

Corollaire 7:
Soit T un intervalle de $\mathbb{R}$. Si une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continues sur T converge uniformément sur T vers une fonction continue sur T.

Méthode 8 (Stratégie de la barrière):
1. La continuité (la dérivabilité aussi) est une propriété *locale*. Pour montrer qu'une fonction est continue sur un intervalle T, il suffit donc de montrer qu'elle est continue sur tout segment inclus dans T.
2. Mais, la convergence uniforme est une propriété *globale*. La convergence sur tout segment inclus dans un intervalle n'implique pas la convergence uniforme sur l'intervalle (voir l'exercice 2).
3. On n'écrit pas

$$\begin{array}{c}\text{convergence uniforme}\\ \text{avec barrière}\end{array} \implies \begin{array}{c}\text{convergence uniforme}\\ \text{sans barrière}\end{array} \implies \begin{array}{c}\text{continuité}\\ \text{sans barrière}\end{array}$$

mais plutôt

$$\begin{array}{c}\text{convergence uniforme}\\ \text{avec barrière}\end{array} \implies \begin{array}{c}\text{continuité}\\ \text{avec barrière}\end{array} \implies \begin{array}{c}\text{continuité}\\ \text{sans barrière}\end{array}.$$

4. Si, pour tous a et b, f est bornée sur $[a,b] \subset T$, mais cela n'implique pas que f est bornée. Contre-exemple : la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est bornée sur tout intervalle $[a,b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}_*^+$, mais f n'est pas bornée sur $]0,+\infty[$.

Théorème 9 (double-limite ou d'interversion des limites):
Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un intervalle T, et, soit a une extrémité (éventuellement infinie)[3] de cet intervalle. Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge <u>uniformément</u> sur T vers f et si chaque fonction f_n admet une limite finie b_n en a, alors la suite de réels b_n converge vers un réel b, et $\lim_{t\to a} f(t) = b$. Autrement dit,

$$\lim_{t\to a} \underbrace{\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right)}_{f(x)} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(\lim_{t\to a} f_n(t)\right)}_{b_n}.$$

□

Remarque:
Le théorème de la double-limite « contient » le théorème 6 (théorème de préservation/transmission de la continuité), c'est un cas particulier. En effet, si les fonctions f_n sont continues, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = \underbrace{\lim_{n\to+\infty} f_n(a)}_{f(a)}.$$

2. C'est là où l'hypothèse de la convergence uniforme est utilisée : on a besoin que le N ne dépende pas de x car on le fait varier.
3. autrement dit, $a \in \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Contre-exemple:
On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (t \mapsto t^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$1 = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\lim_{t\to 1} f_n(t)}_{1} \neq \lim_{x\to 1} \overbrace{\lim_{n\to+\infty} f_n(t)}^{f(t)} \text{ n'existe pas.}$$

3 Intégrer

Théorème 10 (interversion de la limite et de l'intégrale sur un segment):
Si une suite de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur un segment $[a, b]$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$, alors f est continue sur $[a, b]$ (théorème 6) et

$$\int_a^b \underbrace{\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right)}_{f(t)} \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t\right)}_{I_n}$$

(d'où, pas d'intégrales impropres). Autrement dit, la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies comme primitives des fonctions continues f_n :

$$\begin{aligned} F_n : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f_n(t)\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

converge uniformément vers

$$\begin{aligned} F : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Preuve:
On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur un segment $[a, b]$. On veut monter que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t\right) - \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = 0$$

i.e.

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right) = 0.$$

Or,

$$0 \leqslant \left| \int_a^b \big(f_n(t) - f(t)\big)\ \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b \big|f_n(t) - f(t)\big|\ \mathrm{d}t$$

d'après l'inégalité triangulaire. Or, $\mathbb{R} \ni M_n = \sup_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'où M_n est un majorant donc

$$0 \leqslant \left| \int_a^b \big(f_n(t) - f(t)\big)\ \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b M_n\ \mathrm{d}t = (b - a) \cdot M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

D'où, d'après le théorème des gendarmes,[4] on a bien

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t.$$

La preuve de la seconde partie du théorème est dans le poly.

Théorème 11 (convergence dominée):
Soit T un intervalle et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur T. Si

4. aussi appelé *théorème d'existence de la limite par encadrement*.

1. la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur T vers une fonction f continue par morceaux,
2. il existe une fonction φ continue par morceaux sur T et intégrable[5] sur T telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in T, \quad \left|f_n(t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

alors les fonctions f_n et la fonction f sont intégrables et la suite de réels $\int_T f_n$ converge vers le réel $\int_T f$.

Exercice 12:
Montrer que la suite de réels $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t/n}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ *est bien définie, qu'elle converge et déterminer sa limite.*

On doit donc montrer que l'intégrale I_n converge (1) puis étudier la limite de la suite des réels $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (2). Soit

$$\begin{aligned} f_n : [0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \frac{\mathrm{e}^{-t/n}}{1+t^2} \end{aligned}$$

1. L'intégrale I_n est impropre en $+\infty$. On a, $\forall t \in [0,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{1}{1+t^2}$. Or, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge[6] donc l'intégrale I_n converge.
2. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \frac{1}{1+t^2} \end{aligned}$$

car $f_n(t)$ converge vers 1 si $t=0$, et $\frac{\mathrm{e}^{-0}}{1+t^2}$ si $t>0$. De plus, $\forall n$, $\forall t$, $|f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$ où $\varphi(t) = 1/(1+t^2)$. Or, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. Donc, d'après le théorème de la convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{n}}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{n}}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Méthode 13 (du discret au continu):

Rappel (caractérisation séquencielle de la limite):

$$g(x) \xrightarrow[x\to a\in\bar{\mathbb{R}}]{} \ell \in \bar{\mathbb{R}} \quad\Longleftrightarrow\quad \forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \implies f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Exercice 14:
Étudier $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

Méthode 1 sans la caractérisation séquentielle de la limite mais avec le théorème de la limite monotone (croissance de F). On remplace le réel x par un entier n[7] : on veut étudier

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(nt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On utilise le théorème de convergence dominée (TCD). Soit, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f_n : [0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \frac{\mathrm{Arctan}(nt)}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Soit $t \in [0,+\infty[$.

$$f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ \dfrac{\pi/2}{1+t^2} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

5. i.e. l'intégrale $\int_T |\varphi|$ converge
6. car $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\mathrm{Arctan}\,t]_0^+\infty = \frac{\pi}{2} - 0$.
7. i.e. on discrétise le problème

Ainsi, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f. Et,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in[0,+\infty[,\quad |f_n(t)|\leqslant\frac{\pi/2}{1+t^2}=\varphi(t)$$

et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi(t)\ \mathrm{d}t$ converge. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{Arctan}(nt)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}f(t)\ \mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{4}.$$

Attention, $\lim_{n\to\infty}f(n)$ n'est pas forcément égal à $\lim_{x\to+\infty}f(x)$; par exemple, avec $f(x)=\sin(2\pi x)$. Or, la fonction

$$\begin{aligned} F:[0,+\infty[&\longrightarrow\mathbb{R}\\ x&\longmapsto\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t\end{aligned}$$

est croissante ; en effet,

$$\begin{aligned} x_1\leqslant x_2 &\implies x_1t\leqslant x_2t \text{ car } t\geqslant 0\\ &\implies \operatorname{Arctan}(x_1t)\leqslant\operatorname{Arctan}(x_2t) \text{ car } \operatorname{Arctan} \text{ est croissante}\\ &\implies \frac{\operatorname{Arctan}(x_1t)}{1+t^2}\leqslant\frac{\operatorname{Arctan}(x_2t)}{1+t^2}\\ &\implies F(x_1)\leqslant F(x_2) \text{ par croissance de l'intégrale.}\end{aligned}$$

D'où, d'après le théorème de la limite monotone, $\lim_{x\to+\infty}F(x)$ existe. Or, $F(n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\pi^2/4$. Et, par unicité de la limite,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2}\ \mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{4}.}$$

Ou, autre rédaction :

$$F(\underbrace{\lfloor x\rfloor}_{\in\mathbb{N}})\leqslant F(x)\leqslant F(\underbrace{\lfloor x\rfloor+1}_{\in\mathbb{N}})$$

par croissance de F. D'où par théorème des gendarmes, $F(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\frac{\pi^2}{4}$.

Cas 2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui tend vers $+\infty$. On pose

$$\begin{aligned} f_n(t):[0,+\infty[&\longrightarrow\mathbb{R}\\ t&\longmapsto\frac{\operatorname{Arctan}(u_n\,t)}{1+t^2}.\end{aligned}$$

On remarque que

$$f_n(t)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\begin{cases}0 & \text{si } t=0\\ \frac{\pi/2}{1+t^2} & \text{si } t>0,\end{cases}$$

on pose donc

$$\begin{aligned} f:[0,+\infty[&\longrightarrow\mathbb{R}\\ t&\longmapsto\begin{cases}0 & \text{si } t=0\\ \frac{\pi/2}{1+t^2} & \text{si } t>0.\end{cases}\end{aligned}$$

D'où, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f. Or,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in\mathbb{R}^+,\quad |f_n(t)|\leqslant\frac{\pi/2}{1+t^2}.$$

D'où, d'après le théorème de la convergence dominée,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f_n(t)\ \mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}f_n(t)\ \mathrm{d}t.$$

Or, $\int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\pi/2}{1+t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2}$. D'où, on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_0^{+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t}_{F(u_n)} = \frac{\pi^2}{4}.$$

On a montré que $F(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{4}$ pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$. D'où, d'après la caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit que

$$F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{4}.$$

4 Dériver

Théorème 15 (interversion limite et dérivée):
Soit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment $[a,b]$. Si,

1. la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f,
2. la suite de dérivées $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction g ;

alors

1. la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, et $\forall x \in [a,b]$, $f'(x) = g(x)$, [8]
2. la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers g.

Preuve:
On utilise le théorème 10 : on a

$$\begin{array}{ccccc}
f_n(x) & = & f_n(c) & + & \displaystyle\int_c^x f'_n(t)\ \mathrm{d}t \\
\downarrow^{9} & & \downarrow^{9} & & \downarrow \\
f(x) & & f(c) & & \displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_c^x f'_n(t)\ \mathrm{d}t \\
 & & & & \displaystyle = \int_c^x \lim_{n\to\infty} f'_n(t)\ \mathrm{d}t \\
 & & & & /ds = \int_c^x g(t)\ \mathrm{d}t
\end{array}$$

car $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g. L'intégrale de f'_n existe car, comme les fonctions f_n sont de classe $\mathscr{C}^1$, alors les fonctions f'_n sont de classe $\mathscr{C}^0$ donc continues. On veut montrer que $g = f'$. On sait que, $\forall x \in [a,b]$, $f(x) = f(c) + \int_c^x g(t)\ \mathrm{d}t$ par unicité de la limite. De plus, la fonction g est continue car $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g et f'_n est continue (d'après le théorème 6). D'où f est dérivable sur $[a,b]$ et, $\forall x \in [a,b]$, $f'(x) = g(x)$. Mieux : f est de classe $\mathscr{C}^1$.

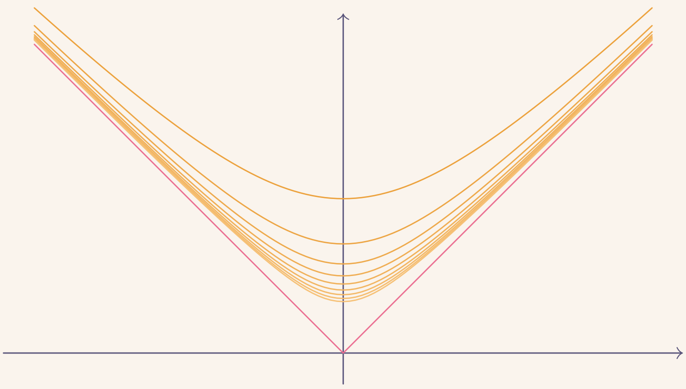

Figure 2 – Suite de fonctions $\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

8. Autrement dit, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)$.
9. car (f_n) converge simplement vers f

Exercice 16:
On pose, pout tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}.$$

1. *Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement. Vers quelle fonction f ?*
2. *La convergence est-elle uniforme ?*
3. *Les fonctions f_n sont-elles de classe $\mathscr{C}^1$? Et la fonction f ? Que dit le théorème précédent ?*

1. Soit $x \in [-1,1]$. On a $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{x^2} = |x|$. Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers

$$f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto |x|.$$

   On remarque que l'on a perdu la dérivabilité en 0.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [-1,1]$. On calcule

$$\begin{aligned}
\left|f_n(x) - f(x)\right| = \left|\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - |x|\right| &= \sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - |x| \\
&= \frac{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - |x|}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} + |x|} \times \left(\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} + |x|\right) \\
&= \frac{\cancel{x^2} + \frac{1}{n} - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} + |x|} \\
&\geqslant \frac{1/n}{\sqrt{0+\frac{1}{n}} + 0} = \frac{1}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

   qui est un majorant.[10] D'où, $0 \leqslant \sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1/\sqrt{n}$. Donc, d'après le théorème d'existence de la limite par encadrement, $\sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. On déduit donc que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f qui est la valeur absolue.
3. La fonction f_n est dérivable[11] sur $[-1,1]$, et

$$\forall x \in [-1,1], \quad f_n'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}}.$$

   Or, les fonctions f_n' est continue.[12] Néanmoins, la fonction $f : x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0, donc n'est pas $\mathscr{C}^1$. D'où, en utilisant le théorème d'interversion de limite et de dérivée, par l'absurde, la suite de fonctions $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers f'.

Méthode 17:
$\varnothing$

Corollaire 18:
$\varnothing$

10. qui ne dépend pas de x
11. par composée de fonctions dérivables/par les théorèmes généraux
12. car c'est un quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas/d'après les théorèmes généraux

5 Approximation uniforme par des polynômes

Remarque 19 (Rappel):
Soit f une fonction d'un intervalle I dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

La fonction f est continue sur I si et seulement si

$$\forall a \in I, \qquad \underbrace{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \qquad |x-a| \leqslant \eta \implies |f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon}_{f \text{ est continue en } a}.$$

La fonction f est uniformément continue sur I si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall a \in I,\ \forall x \in I, \qquad |x-a| \leqslant \eta \implies |f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

L'uniforme continuité implique la continuité. La réciproque est fausse.

Exercice 20:
Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x-a| \leqslant \eta \implies |f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

Or, $|f(x)-f(a)| = |x^2-a^2|$. Soit $x = a+h$ avec $0 < h \leqslant \eta$, d'où $|x^2-a^2| = \left|(a+h)^2-a^2\right| = |2ha+h^2|$. Ce qui est absurde car $|2ah+h^2 \xrightarrow[a \to +\infty]{} +\infty$ comme $h \neq 0$.

Théorème 21 (Heine):
Une fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce même segment.

L'interpolation n'est pas toujours une bonne approximation.

Exemple 22 (phénomène de Runge):
La fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

peut être approché par un polynôme à l'aide des polynômes interpolateur de Lagrange : on choisit plusieurs points sur la courbe de f, et on interpole entre ces points.

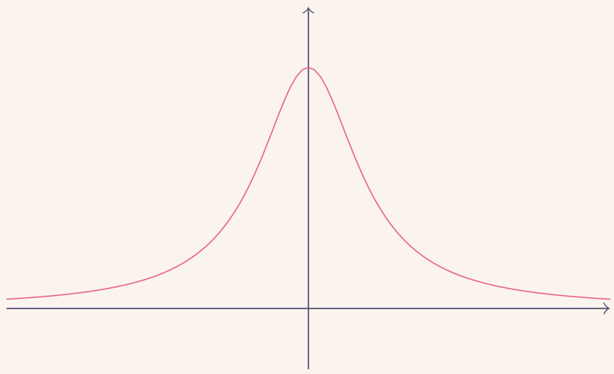

Figure 3 – Graphe de $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
À faire : Interpolation de Lagrange

Théorème 23 (Weierstraß):
Si une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur le segment $[a,b]$, alors il existe une suite de polynômes P_n qui converge uniformément vers f telle que

$$\sup_{[a,b]} |f - P_n| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Théorème 24 (théorème des moments):
Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$. Montrer que, si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b x^n f(x)\ \mathrm{d}x = 0,$$

alors la fonction f est nulle. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, il existe donc $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$. Alors,

$$\int_a^b P(x) \cdot f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b \Big(\sum_{k=0}^n a_k x^k \Big) \cdot f(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n a_k \underbrace{\int_a^b x^k f(x)\ \mathrm{d}x}_{0} = 0.$$

Or, d'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent uniformément vers f. D'où,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b P_n(x) \cdot f(x)\ \mathrm{d}x.$$

On va montrer que

$$\int_a^b P_n(x) \cdot f(x)\ \mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(x) \cdot f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Or, d'après le théorème de Weierstrass, la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f. D'où,

$$\Big| P_n(x) f(x) - f(x) \cdot f(x) \Big| = \underbrace{\Big| P_n(x) - f(x) \Big|}_{\leqslant \sup_{[a,b]} |f - P_n|} \times \underbrace{\Big| f(x) \Big|}_{\leqslant M}$$

où M est le majorant qui existe car toute fonction continue sur un segment est bornée. D'où,

$$\Big| P_n(x) f(x) - f(x) \cdot f(x) \Big| \leqslant M \times \sup_{[a,b]} |f - P_n|.$$

D'où

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_a^b P_n(x) \cdot f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} P_n(x) \cdot f(x)\ \mathrm{d}x.$$

On en déduit donc que

$$\int_a^b f^2(x)\ \mathrm{d}x = 0.$$

Or, si l'intégrale d'une fonction positive et continue est nulle, alors la fonction est nulle. Donc

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) = 0.$$

Deuxième partie

T.D.

Exercice 1

1. Soit $x \in [0,1]$. Si $x = 0$, alors $f_n(x) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Mais, si $x \neq 0$, alors $f_n(x) = x^n \ln x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ par croissances comparées. Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle $\tilde{0}$.
2.