Chapitre 3

Intégrer sur un intervalle

Hugo Salou MPI*

Dernière mise à jour le 25 octobre 2022

Première partie

Cours

1 Intégrer une fonction continue par morceaux sur un segment

Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur un segment $[a, b]$ possède une intégrale $\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$.

Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n) \in \mathfrak{S}_{[a,b]}$ de $[a, b]$ (donc $a = x_0 < \cdots < x_n = b$) et que $f\big|_{]x_{i-1}, x_i[}$ est continue, pour tout i et que les limites de f en x_i et x_{i-1}. On dit que σ est *adaptée* à f. Alors, l'intégrale de f est

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{[x_{i-1}, x_i]} f_i$$

où $f_i = f\big|_{[x_{i-1}, x_i]}$.

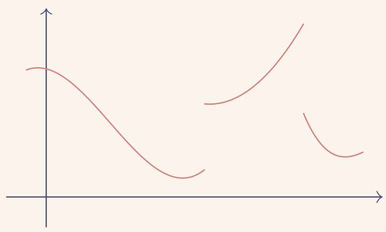

Figure 1 – Une fonction continue par morceaux

Remarque 1 (intégrale et primitive):
On dit que $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de $f : I \to \mathbb{R}$ si F est dérivable et $F' = f$.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, bend left, "\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\square)"] & f \arrow[l, bend left, "\int \square\, \mathrm{d}x"] \end{tikzcd}.$$

2 Qu'est ce qu'une intégrale généralisée ?

Définition 2:
Une fonction est *continue par morceaux* sur un intervalle I si elle est continue par morceaux sur chacun des segments inclus dans I.

Pour la $1^{\text{ère}}$ intégrale, la fonction intégrée n'est pas définie en $t = 1$. On intègre donc jusqu'à x pour $x < 1$ et on prend la limite pour $x \to 1$.

Pour la 2^{nde} intégrale, la borne supérieur est $+\infty$. On intègre donc jusqu'à x et on étudie la limite pour $x \to +\infty$ (comme pour les séries).

$$F(x) := \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} \ell \in \mathbb{R} & \implies \text{l'intégrale } \int_a^{+\infty} f \text{ converge} \\ \text{sinon} & \implies \text{l'intégrale } \int_a^{+\infty} f \text{ diverge.} \end{cases}$$

Définition 3:
Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a, b[$, où $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. Soit, pour $x \in [a, b[$, $F(x) = \int_{[a,x]} f$. On dit que l'intégrale $I = \int_{[a,b[} f$ converge en b si la limite $\lim_{x \to b^-} F(x)$ existe et est finie. Sinon, on dit qu'elle diverge.

Exemple 4:
Le programme nous permet d'utiliser sans re-démontrer les points 2. et 3.

1. Montrons que $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t$ converge.

   L'intégrale I est impropre en 1 (ou est généralisée en 1). On remarque que, pour tout $x \in [0, 1[$,
$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t = \operatorname{Arcsin} x \xrightarrow[x \to 1^-]{} \operatorname{Arcsin} 1$$
   car Arcsin est continue. Or, $\operatorname{Arcsin} 1 = \frac{\pi}{2}$. Donc, l'intégrale I converge et que $I = \frac{\pi}{2}$.

2. *L'intégrale $J = \int_0^1 \ln t \, \mathrm{d}t$ est convergente en 0.*
   L'intégrale J est impropre en 0. On remarque que, pour $x \in]0, 1]$,
$$\int_x^1 \ln t \, \mathrm{d}t = \big[t \ln t - t\big]_x^1 = -1 - x \ln x + x \xrightarrow[x \to 0^+]{} -1$$
   par croissances comparées. On en déduit que l'intégrale J converge et que elle est égale à -1. Même si la borne supérieure est différente, on peut retrouver cette formule avec les relations de Chasles sur les intégrales.

3. *L'intégrale $B = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{Kt} \, \mathrm{d}t$ (où K est une constante) converge en $+\infty$ si et seulement si $K < 0$.*
   L'intégrale B est impropre en $+\infty$. On remarque que, pour $x \in \mathbb{R}_*^+$,
$$\int_0^x \mathrm{e}^{Kt} \, \mathrm{d}t = \begin{cases} \left[\frac{\mathrm{e}^{Kt}}{K}\right]_0^x & \text{si } K \neq 0 \\ x & \text{si } K = 0. \end{cases}$$
   Or, $x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ donc B diverge si $K = 0$; de plus,
$$\frac{\mathrm{e}^{Kx} - 1}{K} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \begin{cases} -\frac{1}{K} & \text{si } K < 0 \\ +\infty & \text{si } K > 0. \end{cases}$$
   On en déduit que l'intégrale B converge si et seulement si $K < 0$ et, si $K < 0$, on a $B = -\frac{1}{K} > 0$.

Remarque 5:
Si f est continue par morceaux sur $]a, b[$ (où $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$), et l'intégrale $\int_{]a,b[} f$ est impropre en a <u>et</u> en b, alors on utilise la relation de Chasles en découpant cette intégrale avec $c \in]a, b[$: l'intégrale $\int_{]a,b[} f$ converge si et seulement si $\int_{]a,c]}$ converge **et** $\int_{[c,b[}$ converge. Si ces deux intégrales convergent, alors
$$\int_{]a,b[} f = \int_{]a,c]} f + \int_{[c,b[} f.$$

Exercice 6:
Cet exercice, comme indiqué dans le programme, peut être utilisé sans avoir à le re-démontrer.
Soit α un réel. Montrons que
- *l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ (comme pour les séries) ;* *[critère de Riemann en $+\infty$]*
- *l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$;* *[critère de Riemann en 0]*
- *l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t$ diverge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t$ est impropre en $+\infty$. Soit $x \in [1, +\infty[$.
$$\begin{aligned} \int_1^x f(t) \, \mathrm{d}t &= \begin{cases} \big[\ln t\big]_1^x & \text{si } \alpha = 1 \\ \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right] & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{x^{-\alpha+1} - 1}{-\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \end{aligned}$$
   Si $-\alpha + 1 < 0$, alors $\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{\alpha - 1}$. Si $-\alpha + 1 > 0$, alors $\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.
   L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Remarque 7:
Si $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}^+$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ peut converger même si $f(t) \underset{t\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$. En effet, la fonction décrite sur le poly est un bon exemple : son intégrale converge mais la fonction ne tend pas vers 0.

Proposition 8 (intégrales faussement impropres):
Si une fonction $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $]a, b]$ et possède une limite finie ℓ en a, alors son intégrale $\int_a^b f(t)\, d t$est impropre en a mais elle converge en a. On dit donc qu'elle est *faussement* impropre.

Preuve:
Soit $x \in]a, b]$. On considère l'intégrale $\int_x^b f(t)\, dt = F(b) - F(x)$ où F est <u>une</u> primitive de f sur $]a, b]$. On cherche donc la limite de F quand $x \to a^+$. On prolonge par continuité f en a, en posant $f(a) = \ell$. La fonction f est donc continue sur $[a, b]$. Cette fonction f prolongée possède une primitive F sur $[a, b]$. Donc f est dérivable sur $[a, b]$ et donc continue sur $[a, b]$. On en déduit que $F(x)$ admet une limite finie en a, et donc $\int_a^b f(t)\, dt$ existe.

Exemple 9:
On pose f, le sinus cardinal :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \frac{\sin t}{t}. \end{aligned}$$

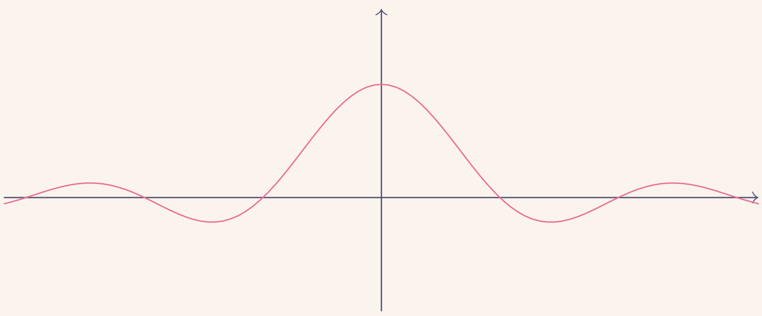

Figure 2 – Sinus cardinal

La fonction f est continue sur $]0, 8]$ mais $\lim_{t\to0} \frac{\sin t}{t} = 1$. D'où $\int_0^8 \frac{\sin t}{t}\, dt$ est faussement impropre en 0 et donc convergente.

Mais attention ! On ne dit pas « soit $f : t \mapsto \frac{1}{t}$. L'intégrale $\int_8^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$ est faussement impropre en $+\infty$ car $\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} = 0$. »

3 Intégrer les $\sim$, o, et O

Théorème 10:

$$\varnothing$$

Théorème 11:
Le 2. n'est pas la réciproque du 1. mais la contraposée.

Proposition 12:

$$\varnothing$$

Exemple 13:
On considère l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2+\cos t}\, dt$, c'est une intégrale impropre en $+\infty$. On recherche un équivalent de $\frac{1}{t^2+\cos t}$ en $+\infty$:

$$\frac{1}{t^2 + \cos t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

qui ne change pas de signe. Or, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge car c'est une intégrale de RIEMANN avec $\alpha = 2 > 1$. On en déduit que l'intégrale I converge.

On procède autrement :

$$0 \leqslant \frac{1}{t^2+\cos t} \leqslant \frac{1}{t^2-1}.$$

Or, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ converge car

$$\begin{aligned}\int_2^x \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t &= \int_2^x \left(\frac{1/2}{t-1} - \frac{1/2}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_2^x \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_2^x \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln|t-1|\Big]_2^x - \frac{1}{2}\Big[\ln|t+1|\Big]_2^x\end{aligned}$$

D'où

$$\int_2^x \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_2^x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{2}\ln 3 \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}\ln 3.$$

donc l'intégrale I converge et $I \leqslant \frac{1}{2}\ln_3$.

EXERCICE 14: 1. L'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est impropre en 0. On utilise un équivalent : $\sin t \sim_{t\to 0} t$ qui ne change pas de signe. Or, $\int_0^t \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge (par critère de RIEMANN). Donc I diverge.
L'intégrale $J = \int_1^{+\infty} \sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ est généralisée en $+\infty$. On cherche un équivalent en $+\infty$:

$$\sin\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$$

qui ne change pas de signe. Or, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge par critère de RIEMANN. On en déduit que J diverge également.

2. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est impropre, **et** en 0, **et** en $+\infty$. Le théorème ne marche donc pas. En effet $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ n'est pas continue par morceaux en 0, ce qui était le cas pour $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$.

REMARQUE (Retour sur la REMARQUE 5):
L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t$ est impropre en 0 **et** en $+\infty$. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_0^7 \frac{1}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t$ **et** $\int_7^{+\infty} \frac{1}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t$ convergent. Et si elles convergent

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^7 \frac{1}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t + \int_7^{+\infty} \frac{1}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t.$$

On n'utilise pas deux barrières en même temps. Sinon, les intégrales doublement impropres peuvent, et converger, et diverger.

PROPOSITION 15 (avec $\sim$):
Si $f(t) \sim_{t\to b} g(t)$ qui ne change pas de signe. Alors,

— ou bien $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

— ou bien $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ divergent et $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

Cette proposition est équivalente à le LEMME 13 sur les séries.

EXERCICE 16:
Montrons que

$$\int_x^1 \frac{1}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln x.$$

L'intégrale $\int_x^1 \frac{1}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t$ est généralisée en 0. *Quelle est sa nature ?* On cherche un équivalent de la fonction intégrée :

$$\frac{1}{\ln(1+t)} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t} \text{ qui ne change pas de signe}$$

car $\ln(1+t) = t + o_{t\to 0^+}(t)$, d'où $\ln(1+t) \sim_{t\to 0^+} t$. Or, $\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge (par critère de Riemann) donc $\int_0^1 \frac{1}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t$ diverge aussi. D'où, leurs « sommes partielles » sont équivalentes :

$$\int_x^1 \frac{1}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0^+}{\sim} \int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln 1 - \ln x = -\ln x.$$

4 La convergence absolue

Théorème 17:
Soit $f : [a,b[$ une fonction continue par morceaux. Si l'intégrale $\int_{[a,b[} |f|$ converge, alors $\int_{[a,b[} f$ converge aussi et,

$$\left| \int_{[a,b[} f \right| \leqslant \int_{[a,b[} |f|$$

(inégalité triangulaire).

Preuve:
On a

$$\forall t \in [a,b[, \quad f(t) = \frac{f(t)+|f(t)|}{2} + \frac{f(t)-|f(t)|}{2} = \underbrace{\frac{f(t)+|f(t)|}{2}}_{\geqslant 0} - \underbrace{\frac{|f(t)|-f(t)}{2}}_{\geqslant 0}.$$

L'analogie est, par exemple,

- en analyse, $f(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2} + \frac{f(t)-f(-t)}{2}$, une somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
- en algèbre, $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \ni M = \frac{M+M^\top}{2} + \frac{M-M^\top}{2}$ une somme d'une matrice symétrique $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et d'une matrice antisymétrique $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.

On suppose que l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

- On montre que $\int_a^b \frac{f(t)+|f(t)|}{2}\,\mathrm{d}t$ converge. On sait que

$$0 \leqslant \frac{f(t)-|f(t)|}{2} \leqslant |f(t)|.$$

  Or, $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge et donc $\int_a^b \frac{f(t)+|f(t)|}{2}\,\mathrm{d}t$ converge aussi.
- De même, on montre que $\int_a^b \frac{|f(t)|-f(t)}{2}\,\mathrm{d}t$ converge.

On en déduit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Montrons à présent l'inégalité triangulaire : on veut montrer que

$$-\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ce qui est vrai car $\forall t \in [a,b[,\ -|f(t)| \leqslant f(t) \leqslant |f(t)|$, et l'intégrale $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante. D'où, $\forall x \in [a,b[$,

$$\int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Enfin, les inégalités larges passent à la limite quand $x \to b$.

Exercice 18:
1. On sait, $\forall t \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \left|\frac{\sin t}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$. Or, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge d'après le critère de Riemann (car $2 > 1$). D'où $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t^2}\right|\,\mathrm{d}t$ converge et donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge aussi.
2. L'intégrale $\int_0^1 \sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ est impropre en 0. Or,

$$0 \leqslant \left|\sin\frac{1}{t}\right| \leqslant 1,$$

   et l'intégrale $\int_0^1 1\,\mathrm{d}t$ converge, donc $\int_0^1 \sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

5 Intégrer par parties et changer de variables

Proposition 19:
L'intégration par parties, pour les intégrales sur un segment, donne, si f et g sont deux fonctions de classes $\mathscr{C}^1$:
$$\int_{[a,b]} fg' = \Big[fg\Big]_a^b - \int_{[a,b]} f'g.$$
Si l'intégrale est généralisé, on « met une barrière » et on utilise l'intégration par parties sur un segment, puis on passe à la limite. On étudie tous les cas :

— si $\big[fg\big]_a^x \xrightarrow[x\to b]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $\int_{[a,b[} fg'$ et $\int_{[a,b[} f'g$ ont la même nature ;

— si $\big[fg\big]_a^x$ diverge quand $x \to b$, alors on ne peut pas conclure.

La « morale » de la proposition 19 est : IPP dans une intégrale généralisée, on « met une barrière. »

Exercice 20 (tarte à la crème):
L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ est appelée l'intégrale de Dirichlet. On montre qu'elle converge et, on calculera sa valeur dans le TD nº 3. Elle est impropre en 0 et en $+\infty$. On n'écrit pas
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t.$$
L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si les deux intégrales
$$I = \int_0^1 \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$$
convergent.

L'intégrale I converge car elle est faussement impropre ($\sin(t)/t \xrightarrow[t\to 0]{} 1$).

Qu'en est-il de J ? On peut majorer la valeur absolue de la fonction intégrée mais cela ne permet pas de conclure. On fait donc une IPP : on pose, pour $t \in [1, +\infty[$, $f(t) = -\cos t$ et $g(t) = \frac{1}{t}$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$, d'où
$$\int_1^x f'(t) \times g(t)\ \mathrm{d}t = \Big[fg\Big]_1^x - \int_1^x f(t) \times g'(t)\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\ \mathrm{d}t.$$
On vent montrer que $\int_{[1,x]} f' \cdot g$ a une limite finie quand $x \to +\infty$. D'une part
$$\left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^x = \frac{\cos 1}{1} - \frac{\cos x}{x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\cos x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$
car cos est bornée et $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

D'autre par, pour $x \in [1, +\infty[$,
$$0 \leqslant \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$$
et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t$ converge.

Par différence, on en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}$ converge.

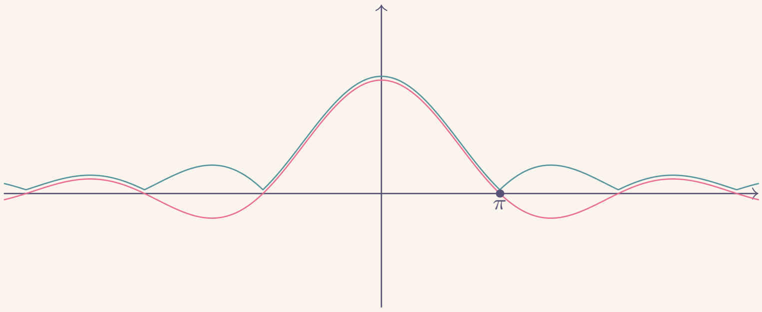

Figure 3 – Graphe de $\frac{\sin t}{t}$ et $\left|\frac{\sin t}{t}\right|$

Remarque 21:
Montrons que $\int_\pi^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\,\mathrm{d}t$ diverge. On va montrer que $\sum_{k\geqslant 1}^N \underbrace{\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\,\mathrm{d}t}_{u_k}$ tend vers $+\infty$ quand $N\to+\infty$. On sait que

$$u_k \geqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{(k+1)\pi}\,\mathrm{d}t.$$

Or, $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{(k+1)\pi}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(k+1)\pi}\int_0^\pi|\sin t|\,\mathrm{d}t$ car $|\sin|$ est π-périodique. Or,

$$\int_0^\pi|\sin t|\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t = \Big[-\cos t\Big]_0^\pi = 2.$$

D'où

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad u_k \geqslant \frac{2}{(k+1)\pi}\geqslant 0.$$

Or, $\sum\frac{2}{(k+1)\pi}$ diverge, d'où $\sum u_k$ diverge et donc

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\,\mathrm{d}t \text{ diverge.}$$

Proposition 22:
Soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ strictement croissante sur $[\alpha,\beta[$. On pose $a=\varphi(\alpha)$ et $b=\lim_{x\to\beta^-}\varphi(x)$. Si f est continue par morceaux sur $[a,b[$, alors

1. les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\cdot\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature ;
2. si ces intégrales convergent, alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\cdot\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Exercice 23:
On considère l'intégrale $F(x)=\int_0^x\frac{1}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t$, d'où $F(x)=\int_0^x\frac{2}{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$. On fait le *changement de variable* suivant : $u(t)=\mathrm{e}^t$, d'où $\mathrm{d}u=\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=u\,\mathrm{d}t$, et $t\in[0,x]\leftrightarrow u\in[1,\mathrm{e}^x]$. Ainsi

$$F(x)=\int_1^{\mathrm{e}^x}\frac{2}{u+\frac{1}{u}}\times\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\mathrm{e}^x}\frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \Big[2\operatorname{Arctan} u\Big]_1^{\mathrm{e}^x} = 2\operatorname{Arctan}(\mathrm{e}^x)-\frac{\pi}{2}.$$

Si $x\to+\infty$, alors $\mathrm{e}^x\to+\infty$. D'où $\operatorname{Arctan}(\mathrm{e}^x)\longrightarrow\frac{\pi}{2}$. Et donc

$$F(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\frac{2\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

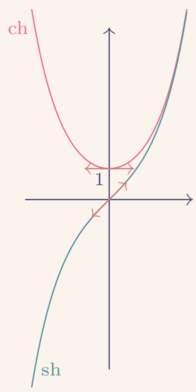

Figure 4 – Graphe de $\operatorname{ch} t$ et $\operatorname{sh} t$

Annexe I : Bilan de la khôlle n°3

Exercice 3

L'intégrale $A = \int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t$ est généralisée en 0 **et** en 1. Il est important d'écrire que « l'intégrale A converge si et seulement si les intégrales $\int_0^{1/2} \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t$ et $\int_{1/2}^1 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t$ convergent. » On tente un développement limité de la fonction dans l'intégrale $\int_{1/2}^1 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t$, mais il faut faire un changement de variables pour pouvoir faire un DL en 0.

On peut faire le changement de variables $t = 1-u$, qui est strictement monotone. On a $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$, d'où

$$\int_{1/2}^1 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t = \int_{1/2}^0 \frac{\ln(1-u)}{-u}\ -\mathrm{d}u = -\int_0^{1/2} \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Or, $\ln(1-u) = u + o(u)$, et donc

$$\frac{\ln(1-u)}{u} = \frac{-u + o(u)}{u} = -1 + o(1) \xrightarrow[u\to 0]{} -1.$$

D'où, l'intégrale $\int_0^{1/2} \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u$ est faussement impropre, donc elle converge.

Mais, au lieu de faire un changement de variables dans l'intégrale, il est préférable de faire le changement de variables dans la fonction et de montrer qu'elle est faussement impropre directement.

Deuxième partie
T.D.

Exercice 1

1. Soit $t > 0$. Montrons que $t - \ln t \geqslant 1$ i.e. $\ln t - t + 1 \leqslant 0$. Or, la fonction ln étant convexe, sa courbe est donc au dessous de ses tangentes. En particulier, de la tangente en 1. On en déduit que
$$\ln t \leqslant \ln'(t)(t-1) + \ln(1) = t - 1.$$
2. Soit $x > 0$. Comme la fonction $\mathrm{id} - \ln$ est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_*^+$, alors, par composition avec la fonction inverse, $x \mapsto \frac{1}{t - \ln t}$ existe et est continue sur $\mathbb{R}_*^+$. Et, comme $x > 0$, si $t \in [2x, x]$, alors $t > 0$. On en déduit que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}_*^+$.
Par croissance de l'intégrale, et comme la fonction $\mathrm{id} - \ln$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_*^+$, on a
$$0 \leqslant \int_x^{2x} 0 \;\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t - \ln t} \;\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} 1 \;\mathrm{d}t = [t]_x^{2x} = x.$$
On a montré que, $0 \leqslant F(x) \leqslant x$.
3. D'après le théorème des gendarmes, et, à l'aide de l'inégalité de la question précédente, on a $F(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$.
4. On détermine une équivalent de $\frac{1}{t - \ln t} - \frac{1}{t}$ quand $t \to +\infty$. Soit $t \geqslant 20$. Tout d'abord, on sait que
$$\frac{1}{t - \ln t} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t} \times \left(\frac{1}{1 - \frac{\ln t}{t}} - 1 \right).$$
On sait que $\frac{\ln t}{t} \longrightarrow 0$ par croissances comparées et donc $\frac{\ln t}{t} = 0 + o(1)$. On en déduit que
$$\frac{1}{1 - \frac{\ln t}{t}} = 1 - \frac{\ln t}{t} + o\left(\frac{\ln t}{t}\right).$$
D'où
$$\frac{1}{t} \times \left(\frac{1}{1 - \frac{\ln t}{t}} - 1 \right) = \frac{1}{t} \times \left(\frac{\ln t}{t} + o\left(\frac{\ln t}{t}\right) \right) = \frac{\ln t}{t^2} + o\left(\frac{\ln t}{t^2}\right).$$
On en déduit que
$$\boxed{\frac{1}{t - \ln t} - \frac{1}{t} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{\ln t}{t^2}.}$$
Ainsi, comme $\frac{\ln t}{t^2} \geqslant 0$, on en déduit qu'il existe un certain t_1 tel que
$$t \geqslant t_1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{t - \ln t} - \frac{1}{t} \geqslant 0.$$
Et, comme $\frac{1}{t - \ln t} - \frac{1}{t} \sim \frac{\ln t}{t^2}$, alors il existe une application $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que
$$\frac{1}{t - \ln t} - \frac{1}{t} = \frac{\ln t}{t^2}(1 + \varepsilon(t)) \quad \text{et} \quad \varepsilon(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0.$$
On en déduit qu'il existe $t_2 > 0$ tel que $\varepsilon(t) \leqslant 1$, et donc
$$t \geqslant t_2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{t - \ln t} - \frac{1}{t} \leqslant (1+1)\frac{\ln t}{t^2}.$$
On pose $T = \max(t_1, t_2)$, et donc
$$\boxed{\forall t \geqslant T, \quad 0 \leqslant \frac{1}{t - \ln t} - \frac{1}{t} \leqslant 2 \cdot \frac{\ln t}{t^2}.}$$

5. Soit $x > 0$. On calcule l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{\ln t}{t^2}\, dt$ à l'aide d'une intégration par parties. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_x^{2x} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_x^{2x} + \int_x^{2x} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\ln x}{x} - \frac{\ln(2x)}{2x} + \left[-\frac{4}{t^4}\right]_x^{2x} \\ &= \frac{\ln x}{x} - \frac{\ln(2x)}{2x} + \frac{1}{4^3 x^4} - \frac{4}{x^4}\end{aligned}$$

6. On sait que

$$\frac{\ln t}{t^2} + o\left(\frac{\ln t}{t^2}\right) = \frac{1}{t - \ln t} - \frac{1}{t}.$$

Exercice 3

Indication : pour la G, on applique la relation de Chasles : l'intégrale $\int_0^7 \mathrm{e}^{-x} \ln x\, \mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x} \ln x \mathrm{d}x$ converge et $\int_1^7 \mathrm{e}^{-x} \ln x\, \mathrm{d}x$ converge (qui n'est même pas impropre).

L'intégrale $H = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\sin t}}{t}\, \mathrm{d}t$ est impropre en 0. On sait que $\sin t \xrightarrow[t\to 0]{} 0$, et donc, par continuité de la fonction exp en 0, $\mathrm{e}^{\sin t} \xrightarrow[t\to 0]{} e^0 = 1$. Ainsi, $\frac{\mathrm{e}^{\sin t}}{t} = \mathrm{e}^{\sin t} \times \frac{1}{t} \sim_{t\to 0} \frac{1}{t}$ qui ne change pas de signe. Or, $\int_0^1 \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t$ diverge, donc l'intégrale H diverge.

L'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sin t}}{t}\, \mathrm{d}t$ est impropre en $+\infty$. Par croissance de la fonction exponentielle, on a $\frac{\mathrm{e}^{\sin t}}{t} \geqslant \frac{\mathrm{e}^{-1}}{t} \geqslant 0$. Or, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t$ diverge, donc l'intégrale diverge aussi.

L'intégrale K, est l'intégrale d'une fonction Gaußienne, et elle est impropre en $+\infty$. On la « découpe » :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x \text{ converge si et seulement si } \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x \text{ converge et } \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x \text{ converge.}$$

L'intégrale $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x$ n'est même pas impropre, elle converge donc. Et, pour $x \in [1, +\infty[$, on sait, comme $x^2 \geqslant x$, $0 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x}$. Or, $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$ converge donc $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x$ aussi. On calculera la valeur de cette intégrale dans le TD « Intégrales paramétrées. »

Autre méthode pour déterminer la nature de K : $\mathrm{e}^{-x^2} = o(\mathrm{e}^{-x})$ car $\mathrm{e}^{-x^2} = \underbrace{\mathrm{e}^{-x^2+x}}_{\to 0} \times \mathrm{e}^{-x}$, car $\mathrm{e}^{-x^2+x} = \mathrm{e}^{-x^2(1-\frac{1}{x})}$ et $-x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right) \to -\infty \times 1$. Et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$ converge donc $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x$ converge.

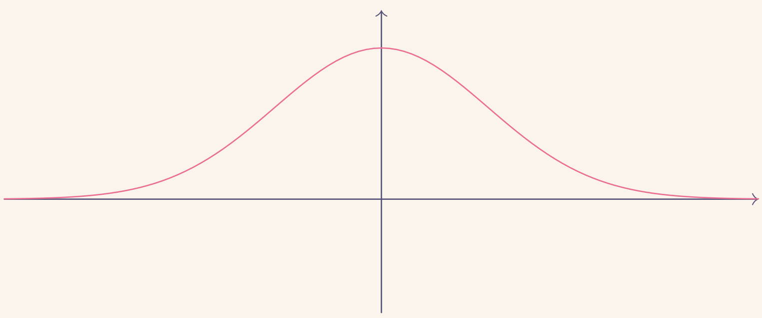

Figure 5 – Courbe Gaußienne

L'intégrale $F = \int_7^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \ln x \; \mathrm{d}x$ est impropre en $+\infty$. Attention : la fonction n'est pas « faussement impropre en $+\infty$. » Mais, on peut remarquer que

$$\mathrm{e}^{-x} \ln x = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \ln x}_{\xrightarrow[x \to +\infty]{} 0} = o(\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}).$$

Or, $\int_7^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \; \mathrm{d}x$ converge donc l'intégrale F converge aussi.

L'intégrale $G = \int_0^7 \mathrm{e}^{-x} \ln x \; \mathrm{d}x$ est impropre en 0. Or, $\mathrm{e}^{-x} \ln x \sim_{x \to 0} \ln x$ qui ne change pas de signe au voisinage de 0. Or, $\int_0^7 \ln x \; \mathrm{d}x$ converge donc l'intégrale G converge également.

L'intégrale $E = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \; \mathrm{d}x$ est impropre en $+\infty$. Or, $\forall x \geqslant \mathrm{e}$, $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{x}} \geqslant 0$ converge. Or, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}} \; \mathrm{d}x$ diverge d'après le critère de Riemann en $+\infty$ car $\frac{1}{2} < 1$. D'où l'intégrale D diverge.

Autre méthode : intégration par parties. On peut même arriver à calculer une primitive de $\ln x \,/ \sqrt{x}$.

L'intégrale $D = \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \; \mathrm{d}x$ est impropre en 0. On peut remarque que

$$0 \leqslant -\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\frac{x^{0,1} \ln x}{x^{0,6}} = o\left(\frac{1}{x^{0,6}}\right) \quad \text{car} \quad x^{0,1} \ln x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

par croissances comparées. Or, $\int_0^1 \frac{1}{x^{0,6}} \; \mathrm{d}x$ converge d'après le critère de Riemann. D'où $-D$ converge et donc D converge.

L'intégrale $J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t} + \sin t} \; \mathrm{d}t$ est impropre en $+\infty$. On calcule

$$f(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t} + \sin t} = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{1 + \frac{\sin t}{\sqrt{t}}}$$

et $\frac{\sin t}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$. D'où

$$\frac{1}{1 + \frac{\sin t}{\sqrt{t}}} = 1 - \frac{\sin t}{\sqrt{t}} + \frac{\sin^2 t}{t} + o\left(\frac{\sin^2 t}{t}\right)$$

et donc

$$f(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{t}} + \frac{\sin^2 t}{t} + o\left(\frac{\sin^2 t}{t}\right).$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \; \mathrm{d}t$ est impropre en $+\infty$. Soit $x \geqslant 1$. On calcule avec une intégration par parties,

$$\int_1^x \sin t \times \frac{1}{\sqrt{t}} \; \mathrm{d}t = \int_1^x u'(t) \cdot v(t) \; \mathrm{d}t$$

où $u(t) = -\cos t$ et $v(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} = t^{-\frac{1}{2}}$. Donc

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \; \mathrm{d}t &= \Big[f(t) g(t)\Big]_1^x - \int_1^x f(t) \cdot g'(t) \; \mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right]_1^x - \int_1^x (-\cos t) \left(-\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}}\right) \; \mathrm{d}t \end{aligned}$$

D'où

$$\int_1^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \; \mathrm{d}t = \cos 1 - \frac{\cos x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \int_1^x \frac{\cos t}{t^{3/2}} \; \mathrm{d}t.$$

Or, d'une part $\cos x \times \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ car cos est bornée et $\frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. Et, d'autre part $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}} \; \mathrm{d}t$ converge car $\forall t \in [1, +\infty[$, $\left|\frac{\cos t}{t^{3/2}}\right| \leqslant \frac{1}{t^{3/2}}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} \; \mathrm{d}t$ converge. Pour le 2nd terme du développement limité, on fait une IPP, on trouve un terme en $\frac{1}{t^2}$ et donc son intégrale converge par critère de Riemann. S'il y a des problèmes, voir en TD. On étudie maintenant le 3ème terme :

$$\int_1^{+\infty} o\left(\frac{\sin t}{t}\right) \mathrm{d}t \text{ converge car } \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} \mathrm{d}t \text{ converge et } t \mapsto \frac{\sin^2 t}{t} \text{ est positive.}$$

Autre méthode : on a

$$\frac{\sin^2 t}{t} + o\left(\frac{\sin^2 t}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sin^2 t}{t} \text{ qui ne change pas de signe.}$$

Or, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t}\, \mathrm{d}t$ converge et donc

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin^2 t}{t} + o\left(\frac{\sin^2 t}{t}\right)\right) \mathrm{d}t.$$

Exercice 8

Q. 6 On considère la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right],\ f(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}.$$

Montrons que f est de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Étudions la limite de f en $0^+_{\neq}$. En effet f est continue en 0 si et seulement si $f(t) \xrightarrow[t\to 0]{} f(0)$. On fait un développement limité :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)} - \frac{1}{t} \\ &= \frac{1}{t} \times \left(\frac{1}{1 - \underbrace{\frac{t^2}{6} + o(t^2)}_{\to 0}} - 1\right) \\ &= \frac{1}{t} \times \left(1 + \frac{t^2}{6} + o(t^2) - 1\right) \\ &= \frac{t}{6} + o(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \end{aligned}$$

   Or $f(0) = 0$. D'où $f(t) \xrightarrow[t\to 0]{} f(0)$.

2. Étudions la dérivabilité de f en 0 : soit $h > 0$, on calcule

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h} = \frac{1}{h \sin h} - \frac{1}{h^2} = \frac{\frac{h}{6} + o(h)}{h} = \frac{1}{6} + o(1) \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{6}.$$

   On en déduit que f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{6}$.

3. f' est continue si et seulement si $f'(t) \xrightarrow[t\to 0]{} f'(0) = \frac{1}{6}$. On sait, comme f est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables, d'où

$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right],\ f'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right) = -\frac{\cos t}{\sin^2 t} + \frac{1}{t^2}.$$

On fait un développement limité de f' :

$$\begin{aligned}
f'(t) &= -\frac{1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)}{\left(t-\frac{t^3}{6}+o(t^3)\right)}+\frac{1}{t^2} \\
&= \frac{1}{t^3}\left(-\frac{1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)}{\left(1-\frac{t^2}{6}+o(t^2)\right)^2}+1\right) \\
&= \frac{1}{t^2}\left(-\left(1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)\times\underbrace{\boxed{\frac{1}{\left(1-\frac{t^2}{6}+o(t^2)\right)^2}}}_{\sim(1+\cdots)^{-2}}+1\right) \\
&= \frac{1}{t^2}\left(-\left(1-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)\times\left(1+(-2)\left(-\frac{t^2}{6}\right)+o(t^2)\right)\right) \\
&= \frac{1}{t^2}\left(-\left(1+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)t^2+o(t^2)\right)+1\right) \\
&= \frac{1}{6}+o(1) \\
&\xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Or, $\frac{1}{6}=f'(0)$ d'après 2. d'où $f'(t)\xrightarrow[t\to 0]{} f'(0)$.

On aurait pu ne pas faire la partie 1. En effet, la dérivabilité de f implique sa continuité. On peut donc utiliser une autre méthode : montrer la continuité de f puis, on montre d'un coup que f est dérivable et que la dérivée est continue à l'aide du théorème de la limite de la dérivée.

Rappel:
Soit f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors,

$$f'(t)\xrightarrow[t\to a]{}\ell\in\mathbb{R}\implies\begin{cases} f \text{ est dérivable en } a \\ f'(a)=\ell \\ f' \text{ est continue en } a.\end{cases}$$

Exercice 6

Quelle est la nature de l'intégrale

$$A=\int_0^{+\infty}\left(x+2-\sqrt{x^2+4x+1}\right)\,\mathrm{d}x\ ?$$

L'intégrale A est impropre en $+\infty$. On calcule donc $a(M)=\int_0^M\left(x+2-\sqrt{x^2+4x+1}\right)\,\mathrm{d}x$ et on étudie sa limite quand M tend vers $+\infty$.

Soit $x\in\mathbb{R}$. On pose $f : x\mapsto x+2+\sqrt{x^2+4x+1}$, et on effectue un développement limité :

$$\begin{aligned}
f(x) &= x+2-\left(1+(x^2+4x)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= x+2-1-\frac{1}{2}(x^2+4x)+o(x) \\
&= \frac{x^2}{2}+1+-x+o(x) \\
&= \frac{x^2}{2}+o(x^2)
\end{aligned}$$

Or, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{2} \,\mathrm{d}x$ diverge par critère de Riemann, et $\int_0^{+\infty} o(x^2) \,\mathrm{d}x$ aussi, et donc

$$\boxed{\text{l'intégrale } A \text{ diverge.}}$$