Chapitre 1

Série

Hugo Salou MPI*
Dernière mise à jour le 25 octobre 2022

Première partie
Cours

1 La nature d'une suite ou d'une série

Méthode 1:
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut

1. avoir une limite $\ell \in \mathbb{R}$;
2. avoir pour limite $\pm\infty$;
3. ne pas avoir de limite.

Converger concerne le premier point ; *avoir une limite* correspond aux deux premiers points et *diverger* correspond aux deux derniers.

Théorème de la limite monotone : toute suite croissante majorée a une limite.

Une série est notée $\sum u_n$. On dit qu'elle *converge* si la suite des sommes partielles S_n converge

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n.$$

La série "$\sum u_n$" n'a pas de valeurs mais une nature ; contrairement à la somme partielle "$\sum_{k=0}^{n} u_n$ a une valeur, on peut la calculer (elle existe toujours) ; et $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ qui est la limite de la somme partielle (elle existe si la série converge).

Si la suite (u_n) ne tends pas vers 0, la série $\sum u_n$ diverge mais la réciproque est fausse : par exemple, la somme des "$\frac{1}{n}$" tends vers 0 mais la série diverge.

Rappel:
Notation en "grand O" : soient u et v deux suites réelles (ou complexes).

$$v_n = O(u_n) \overset{\text{def}}{\iff} v_n = b_n \times u_n, \text{ où } b_n \text{ est bornée,}$$
$$v_n = o(u_n) \overset{\text{def}}{\iff} v_n = \varepsilon_n \times u_n, \text{ où } \varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$
$$v_n \sim u_n \overset{\text{def}}{\iff} v_n = \underbrace{(1+\varepsilon_n)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1} \times u_n, \text{ où } \varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Si on peut diviser par u_n, on peut vérifier

$$v_n = O(u_n) \iff \frac{v_n}{u_n} \in [m, M],$$
$$v_n = o(u_n) \iff \frac{v_n}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$
$$v_n \sim u_n \iff \frac{v_n}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Si la série $\sum u_n$ oscille entre des valeurs positives et négatives, on peut analyser $\sum |u_n|$ car si cette série converge, alors $\sum u_n$ aussi.

Exercice 2: 1. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$?

$$0 \leqslant \frac{1}{n^2+\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

On sait déjà que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (vers $\frac{\pi^2}{6}$) mais ce résultat sera redonné dans la proposition 6 : Critère de Riemann. On en déduit que $\sum \frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$ converge aussi (par comparaison).

Autre méthode : on a

$$0 \leqslant \frac{1}{n^2+\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^2}$$

(à démontrer) ; et comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge alors $\sum \frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$ aussi.

2. On a, comme dans le 1.,

$$\frac{1}{n^2+\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^2}$$

et, comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge alors $\sum \frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$ converge aussi.

3. On a

$$\frac{1}{n\cos^2 n} \geqslant \frac{1}{n},$$

or, $\sum \frac{1}{n}$ diverge (d'après le critère de Riemann) et donc $\sum \frac{1}{n\cos^2 n}$ aussi.

4. On a

$$\frac{\ln n}{n^2} = \underset{n\to+\infty}{\boxed{\frac{\ln n}{n^{0,7}}}} \times \frac{1}{n^{1,3}} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{1,3}}\right).$$

Or, $\sum \frac{1}{n^{1,3}}$ converge (d'après le critère de Riemann) donc $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ converge.

5. Dans cet exemple, on ne peut pas utiliser une minoration $\frac{\sin n}{n^2}$ par $\frac{1}{n^2}$ car la première suite change de signe.
On a

$$0 \leqslant \left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

or, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge d'où $\sum \left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$ converge et donc $\sum \frac{\sin n}{n^2}$ converge (absolument).

2 Comparer série et intégrale

Méthode 3:

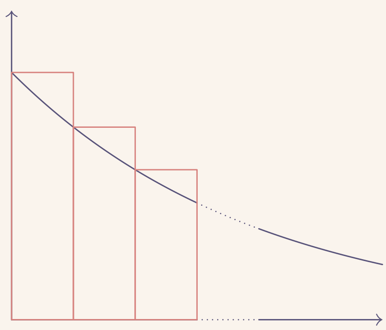

Figure 1 – Comparaison série intégrale
À faire : Refaire les deux graphiques

Des deux dessins ci-dessus, on en déduit les deux inégalités suivantes :

$$\int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=2}^{n} u_k \leqslant \int_1^{n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ainsi,

$$\int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant u_1 + \int_1^{n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Cette méthode permet de calculer une série en calculant une intégrale. On dispose, en effet, de bien plus d'outils pour calculer des intégrales que des séries.

Exercice 4:
On utilise le résultat trouvé dans la méthode précédente : on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} &\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ \iff &\ln(n+1) - \ln 1 \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n - \ln 1 \\ \iff &\boxed{\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n.} \end{aligned}$$

On ne peut pas appliquer le théorème des gendarmes mais comme $\ln(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on en déduit que $H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et donc la suite (H_n) diverge. On en déduit que la série $\sum \frac{1}{k}$ diverge.

Pour montrer que $H_n \sim \ln n$, on ne peut pas le faire *à l'intuition* mais il faut procéder comme il suit :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leqslant \frac{H_n}{\ln n} \leqslant \frac{1+\ln n}{\ln n} = \frac{1}{\ln n} + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} &= \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln n} \\ &= \frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} \\ &= 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}. \end{aligned}$$

Or, d'après le théorème des gendarmes, $\frac{H_n}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et donc

$$\boxed{H_n \sim \ln n.}$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned} H_n &= \ln(n) \times (1+\varepsilon_n) \\ &= \ln(n) + \varepsilon_n \ln n \\ &= \ln n + o(\ln n). \end{aligned}$$

On veut montrer que $H_n - \ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$ i.e. $H_n - \ln n = \gamma + \varepsilon_n$ i.e. on veut montrer que

$$H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n.$$

La forme ci-dessus est plus précise que le résultat que l'on a trouvé précédemment. Pourquoi ? On sait que le reste entre H_n et $\ln n$ est constant et ne tends pas vers $+\infty$ (ce qui n'est pas le case de $o(\ln n)$).

On étudie la suite $(H_n - \ln n)$ et on montre qu'elle est convergente et que ça limite est γ. On sait déjà que l'on ne peut pas calculer γ numériquement, on utilise un théorème qui assure l'existence de la limite sans le calculer ; dans ce cas ci, on utilise le théorème de la limite monotone.

Soit $u_n = H_n - \ln n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule $u_{n+1} - u_n$ et on pressent un télescopage :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \big[H_{n+1} - \ln(n+1)\big] - \big[H_n - \ln(n)\big] \\ &= [H_{n+1} - H_n] - \big[\ln(n+1) - \ln n\big] \\ &= \frac{1}{n+1} - \big[\ln(n+1) - \ln n\big] \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} H_n &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \\ H_{n+1} &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Calculer le signe de

$$\frac{1}{n+1} - \big[\ln(n+1) - \ln n\big].$$

MÉTHODE 1 Graphiquement : À faire : dessin à faire

MÉTHODE 2 Théorème des accroissements finis :

RAPPEL:
Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors

$$\exists c \in]a,b[,\ f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a).$$

On sait déjà que ln est continue sur $[n, n+1]$, et dérivable sur $]n, n+1[$ d'où, il existe $c \in]n, n+1[$ telle que

$$\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{c}\big((n+1) - n\big).$$

Dans les deux cas, on a montré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Or,

$$\begin{aligned} & \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n \\ \text{d'où} \quad & \ln(n+1) - \ln \leqslant H_n - \ln n \end{aligned}$$

et, en passant à la limite, on a $0 \leqslant H_n - \ln n$.

On en déduit que la suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge et on note γ sa limite.

EXERCICE 5:

$$\begin{aligned} \ln(n!) &= \ln\big(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n\big) \\ &= \cancel{\ln(1)} + \ln(2) + \ln(3) + \cdots + \ln(n-1) + \ln n \end{aligned}$$

Pour calculer cette somme, on utilise la méthode des rectangles. Avec des rectangles à droite on obtient l'inégalité

$$\ln(n!) \leqslant \int_2^{n+1} \ln(x)\ \mathrm{d}x.$$

Avec les rectangles à gauche, on obtient

$$\int_1^n \ln x\ \mathrm{d}x \leqslant \ln(n!).$$

D'où

$$\begin{aligned} & \big[x\ln x - x\big]_1^n \leqslant \ln(n!) \leqslant \big[x \ln x - x\big]_2^{n+1} \\ \iff & \frac{\ln n - n + 1}{n \ln n} \leqslant \frac{\ln(n!)}{n\ln n} \leqslant \frac{(n+1)\ln(n+1) - (n+1) - 2\ln 2 + 2}{n \ln n} \end{aligned}$$

Or, les deux “gendarmes” tendent vers 1, par le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\frac{\ln(n!)}{n\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{i.e.} \quad \ln(n!) \sim n\ln n.$$

Proposition 6:
La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

I.3 Le reste d'une série convergente

$$\underbrace{u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n}_{\sum_{k=0}^{n} u_k = S_n \to \text{ somme partielle}} \quad + \quad \underbrace{u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots}_{\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = R_n \to \text{ reste}} \quad .$$

Le reste est défini si et seulement si la série $\sum u_n$ converge. La somme $S_n + R_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est définie si et seulement si la série $\sum u_n$ converge. On pose $\mathbb{R} \ni \ell = S_n + R_n$. Ainsi, on a

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$
$$\ell - S_n = R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - \ell = 0$$

Exercice 7:
La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge d'après le critère de Riemann. D'où le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ est bien défini.

On utilise, encore une fois, la méthode des rectangles : en effet, on a

$$\begin{aligned}
&\int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{n}^{N} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
\iff &\left[-\frac{1}{x}\right]_{n+1}^{N+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leqslant \left[-\frac{1}{x}\right]_{n}^{N} \\
\iff &\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{N}.
\end{aligned}$$

On n'a pas besoin du théorème des gendarmes ; on utilise le fait que les inégalités larges “passent à la limite.”

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} & \leqslant & \sum_{k=n+1}^{N} & \leqslant & \frac{1}{n} - \frac{1}{N} \\
\downarrow_{N\to+\infty} & & \downarrow_{N\to+\infty} & & \downarrow_{N\to+\infty} \\
\frac{1}{n+1} & \leqslant & R_n & \leqslant & \frac{1}{n}.
\end{array}$$

I.4 Les séries alternées

Théorème 8 (Séries alternées):
La série $\sum(-1)^k u_k$ (où u_k tends vers 0 en décroissant, d'où $u_k \geqslant 0$) converge. Et, ℓ a le même signe que le premier terme.

$$\begin{aligned}
S_0 &= u_0 \\
S_1 &= u_0 - u_1 \\
S_2 &= u_0 - u_1 + u_2 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
S_n &= u_0 - u_1 + \cdots + (-1)^n u_n
\end{aligned}$$

À faire : Faire figure (fig. 4)

FIGURE 2 – Série alternée

Le reste $R_n = \ell - S_n$ change de signe une fois sur deux i.e. il est alterné. De plus, on a

$$|R_n| \leqslant u_{n+1}.$$

EXERCICE 9 (Mines-Ponts):
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

(Ça ne sert à rien mais...) comme $\frac{1}{k}$ tends vers 0 en décroissant, d'où, d'après le théorème des séries alternées, la suite (S_n) converge.

Montrons que

$$(1) \qquad \ln 2 - S_n = \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\ \mathrm{d}t$$

et (2) en déduire que S_n tends vers $\ln 2$.

1. On remarque que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t}\ \mathrm{d}t = \big[\ln|1+t|\big]_0^1 = \ln 2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}\ \mathrm{d}t = \left[\frac{t^k}{k}\right]_0^1.$$

D'où,

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \int_0^1 t^{k-1}\ \mathrm{d}t.$$

Or, par linéarité de l'intégrale, on a

$$S_n = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} t^{k-1} \right) \mathrm{d}t.$$

2.

$$\begin{aligned}
|\ln 2 - S_n| &= \left| \int_0^1 \frac{(-1)^n}{1+t}\ \mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \int_0^1 \left| \frac{(-t)^n}{1+t} \right|\ \mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^1 t^n\ \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

par croissance de l'intégrale. D'où, $|\ln 2 - S_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'après le théorème des gendarmes. On en conclut que

$$\boxed{S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2.}$$

Or,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (-t)^{k-1} &= (-t)^0 + (-t)^1 + \cdots + (-t)^{n-1} \\ &= \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)}\end{aligned}$$

car

$$\sum_{k=0}^{N} q^k = q^0 + q^1 + \cdots + q^N = \frac{1-q^{N+1}}{1-q} \qquad \text{si} q \neq 1.$$

D'où

$$\begin{aligned}S_n &= \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \boxed{\ln 2 - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\,\mathrm{d}t.}\end{aligned}$$

On sait que R_n est existe car la suite S_n converge.
La série $\sum R_n$ converge-t-elle ou diverge-t-elle ? On sait que $R_n = (-1)^n\,|R_n|$ au signe près. On veut montrer que $|R_n|$ tend vers 0 en décroissant.

$$\begin{aligned}|R_n| &= \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t \text{ car } \frac{t^n}{1+t} \leqslant t^n \forall t \in [0,1] \\ &\leqslant \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

D'où $|R_n|$ tend vers 0 d'après le théorème des gendarmes.

$$\begin{aligned}|R_{n+1}| - |R_n| &= \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{t^{n+1}-t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{(t-1)t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant 0\end{aligned}$$

On aurait aussi très bien pu utiliser le théorème des séries alternées : $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

Cadeau du *06/09/2022* : calculer les trois limites suivantes (avec un développement limité)

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+x} - 2\sqrt{1+x}}{x}$ (corrigé) ;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{\sin^3 x}$ (non corrigé) ;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$ (corrigé).

La limite $\ln(\cos x)/x^2$ existe-t-elle pour $x \to 0$? Si oui, quelle est sa valeurs.

On utilise un développement limité pour $\ln(\cos x)$ et on obtient $\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Et donc, en divisant ce développement limité par x^2, on obtient

$$\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2} + o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}.$$

Même question avec $\left(\sqrt[3]{8+x} - 2\sqrt{1+x}\right)/x$.

On a $\sqrt[3]{8+x} = (8+x)^{1/3} = 2\left(1+\frac{x}{8}\right)^{1/3} = 2 \times (1+u)$ où $u = \frac{x}{8}$ tends vers 0. On en déduit que

$$\begin{cases} \sqrt{1+x} &= 1 + \dfrac{1}{2}x + o(x) \\ \sqrt[3]{8+x} &= 2 + \dfrac{2}{3}\dfrac{x}{8} + o(x). \end{cases}$$

D'où,

$$\sqrt[3]{8+x} - 2\sqrt{1+x} = 2 + \frac{1}{12}x + o(x) - 2 + x + o(x) = -\frac{11}{12} + o(x).$$

On en conclut donc que

$$\frac{\sqrt[3]{8+x-2\sqrt{1+x}}}{x} = -\frac{11}{12} + o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{11}{12}.$$

Cadeau de plus : $(n - \frac{1}{2})\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1 \sim_{n\to+\infty}$?

I.5 Le critère de d'Alembert

Théorème 10 (Critère de d'Alembert):
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell.$$

1. Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.
2. Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.
3. Si $\ell = 1$, on ne sait pas (BOF).

Preuve:
On suppose $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell < 1$. u_{n+1}/u_n tends vers un réel ℓ inférieur à 1 d'où, il existe un certain λ inférieur à 1 tel qu'à partir d'un certain rang n_0

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \lambda.$$

Soit $n \geqslant n_0$. On a

$$u_n = \overbrace{\frac{u_n}{\cancel{u_{n-1}}}}^{\leqslant\lambda} \times \underbrace{\frac{\cancel{u_{n-1}}}{\cancel{u_{n-2}}}}_{\leqslant\lambda} \times \cdots \times \overbrace{\frac{\cancel{u_{n_0+1}}}{\cancel{u_{n_0}}}}^{\leqslant\lambda} \times u_{n_0}.$$

D'où, $u_n \leqslant \lambda^{n-n_0} \times u_{n_0}$ i.e.

$$u_n \leqslant \lambda^n \times \underbrace{\boxed{\frac{u_{n_0}}{\lambda^{n_0}}}}_{=\text{const}} \quad \text{donc} \quad 0 < u_n \leqslant \text{const} \times \lambda^n.$$

Or, $\sum \text{const} \times \lambda^n = \text{const} \times \sum \lambda^n$ la série de droite est une série géométrique de raison $\lambda < 1$.

Rappel (séries géométriques):

$$\underbrace{\lambda^0+\lambda^1+\cdots+\lambda^n}_{=S_n} = \frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda} \text{ si } \lambda \neq 1$$
$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{1-\lambda}.$$

Fin du Rappel.

Or, $\sum \lambda^n$ converge car $\lambda < 1$ et donc $\sum u_n$ converge.

Remarque 11:

Exercice 12:
La série $\sum a^n/n$ converge-t-elle ?

Comme on n'a pas d'information sur le signe de a, on s'interesse à la convergence de la série $\sum \left|a^n/n\right|$. Or, $\left|a^n/n\right| = |a|^n/n$. On étudie plusieurs cas.

— Si $|a| < 1$, alors $|a|^n/n \leqslant |a|^n$ et, comme $\sum |a|^n$ converge (série géométrique), la série $|a|^n/n$ converge et donc a^n/n également.
— Si $|a| = 1$, alors
  — si $a = 1$, alors la série $\sum \frac{1}{n}$ converge.
  — si $a = -1$, alors série $\sum(-1)^n/n$ converge.
— Si $|a| > 1$, alors $|a|^n \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car

$$\left.\begin{aligned} |a|^n &= \mathrm{e}^{n\ln|a|} \\ n &= \mathrm{e}^{\ln n} \end{aligned}\right\} \implies \frac{|a|^n}{n} = \frac{\mathrm{e}^{n\ln|a|}}{\mathrm{e}^{\ln n}} = \mathrm{e}^{n\ln|a|-\ln n} \text{ or } n\ln|a| - \ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

D'où, $a^n/n \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc $\sum a^n/n$ diverge.

La série $\sum a^n/n!$ converge-t-elle ?

Comme pour la 1ère série, on n'a pas d'information sur le signe de a, on utilise des valeurs absolue : soit $u_n = |a|^n/n!$. On utilise le critère d'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \frac{|a|^{n+1}}{|a|^n} \times \frac{n!}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 = \ell < 1.$$

D'où, $\sum |a|^n/n!$ converge et donc

$$\boxed{\sum \frac{a^n}{n!} \text{ converge } \forall a \in \mathbb{R}}.$$

On remarque que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = \mathrm{e}^a$ d'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$.

I.6 Sommer les $\sim$, o, O

Lemme 13:
1. Si $\sum v_n$ converge et $u_n \sim v_n$, alors le reste $\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$ de $\sum v_n$ existe et il est équivalent au reste de $\sum u_n$.
2. Si $\sum v_n$ diverge et si $u_n \sim v_n$, alors le reste de $\sum v_n$ n'existe pas mais on peut utiliser la somme partielle et elle est équivalente à celle de $\sum u_n$.

Le Lemme ci-dessus est également vrai en remplaçant $\sim$ par o ou O.

Théorème 14:

Exercice 15: 1. On sait que $u_n \sim v_n$ car

$$v_n = \frac{\cancel{n} - (\cancel{n} - 1)}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n^2}$$

ou

$$v_n = \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n}} - 1 \right) = \frac{1}{n} \times \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right) = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}.$$

D'où, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature, et comme $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge. Soient $U_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ et $V_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$. D'après le Théorème 14, on a $U_n \sim V_n$. On peut calculer V_n (somme télescopique) :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{N} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) &= \frac{1}{n} - \cancel{\frac{1}{n+1}} + \cancel{\frac{1}{n+1}} - \cancel{\frac{1}{n+2}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{N-1}} - \frac{1}{N} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{N}\end{aligned}$$

Or, quand $N \to \infty$, on a $V_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} = \frac{1}{n}$. D'où, $U_n \sim \frac{1}{n}$.

2. On a $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \ln n - \ln(n-1)$. On sait que $u_n \sim v_n$ car ... D'où les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature. Or, $\sum \frac{1}{n}$ diverge [1] donc les deux séries divergent. Soient $U_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$ et $V_n = \sum_{k=2}^{n} \big(\ln k - \ln(k-1) \big)$. Grace au Théorème 14, on a $U_n \sim V_n$. On peut calculer V_n (somme télescopique) :

$$\begin{aligned}V_n &= \sum_{k=2}^{n} \big(\ln k - \ln(k-1) \big) \\ &= \cancel{\ln 2} - \ln 1 + \cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2} + \cdots + \ln n - \cancel{\ln(n-1)} \\ &= \ln n - \ln 1 \\ &= \ln n.\end{aligned}$$

Cadeau du *07/09/2022* : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{\sin^3 x}$?

Comme $\sin x \sim_{x \to 0} x$, $\sin^3 x \sim_{x \to 0} x^3$. Le développement limité de $\tan x$ n'est pas au programme, il faudra donc normalement le redémontrer au besoin. On a $\tan x = (\sin x)/(\cos x)$. Or, comme $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$ et $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots$, on a donc

$$\begin{aligned}\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)} \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right) \\ &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{\tan x - x}{\sin^3 x} = \frac{\dfrac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \frac{1}{3} + o(1) \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{3}.$$

1. On peut calculer, comme fait après, une expression de V_n, et en déduire que, comme elle diverge, $\sum \frac{1}{n}$ diverge également.

On cherche un équivalent pour $n \to \infty$ de

$$\left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1.$$

On cherche un développement limité de $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ à l'aide de celui de $\ln(1-x)$: $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots$ et donc

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} \cdots .$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1 &= \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \cdots\right) + 1 \\
&= -1 + 0 - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + 1 \\
&= -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2}.
\end{aligned}$$

I.7 Développements asymptotiques

On cherche un développement asymptotique de la série harmonique (H_n). Cette méthode pourra être utilisée dans le $\mathbf{DM_1}$. Les formules à démontrer sont

$$\begin{aligned}
H_n &= \ln n + o(\ln n) && (1) \\
&= \ln n + \gamma + o(1) && (2) \\
&= \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) && (3) \\
&= \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). && (4)
\end{aligned}$$

Le développement (1) a déjà été fait de deux méthodes différentes dans les Exercices 4 et 15. Le développement (2) a déjà été fait une fois dans l'Exercice 4, mais nous allons utiliser une autre méthode :

$$\begin{aligned}
(2) &\iff H_n - \ln n = \gamma + o(1) \\
&\iff \text{la suite } (H_n - \ln n) \text{ converge.}
\end{aligned}$$

Remarque:
Le " $\Longrightarrow$ " et " $\iff$ " ne peut pas remplacer les mots français : on ne peut pas écrire

$$\text{"d'où } \frac{u_n}{v_n} \longrightarrow 1 \iff u_n \sim v_n\text{"}$$

mais on doit écrire

$$\text{"d'où } \frac{u_n}{v_n} \longrightarrow 1 \text{ donc } u_n \sim v_n\text{".}$$

On va montrer que $(H_n - \ln n)$ converge. On nomme cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 16 (Séries télescopiques): $(*)$ On sait que

$$(\cancel{u_1} - u_0) + (\cancel{u_2} - \cancel{u_1}) + \cdots + (u_n - \cancel{u_{n-1}}) = u_n - u_0.$$

Autrement dit,

$$\sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k-1}) = u_n - u_0.$$

(∗∗) On sait que

$$\sum_{k=n+1}^{N}(u_k-u_{k-1})=(\cancel{u_{n+1}}-u_n)+(\cancel{u_{n+2}}-\cancel{u_{n+1}})+\cdots+(u_N-\cancel{u_{N-1}})=u_N-u_n.$$

Or, si u_N tends vers 0 quand $N\to\infty$, alors, en passant à la limite,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}(u_k-u_{k-1})=-u_n.$$

Fin de la Remarque.

On a

$$\begin{aligned}u_n-u_{n-1}&=(H_n-\ln n)-\big(H_{n-1}-\ln(n-1)\big)\\&=(H_n-H_{n-1})-\big(\ln n-\ln(n-1)\big)\\&=\frac{1}{n}-\ln\frac{n}{n-1}\\&=\frac{1}{n}+\ln\frac{n-1}{n}\\&=\frac{1}{n}+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\\&=\frac{1}{n}-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\&=-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).\\&\sim-\frac{1}{2n^2}.\end{aligned}$$

Or, $\sum\frac{-1}{2n^2}=-\frac{1}{2}\sum\frac{1}{n^2}$ qui est une suite convergente. La série $\sum(u_n-u_{n-1})$ converge donc. Donc, d'après le Théorème 14, les restes des séries $\sum\frac{-1}{2n^2}$ et $\sum(u_n-u_{n-1})$ sont équivalents.

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}(u_k-u_{k-1})=-u_n \qquad \text{car la suite tend vers 0}$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{-1}{2k^2}=-\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

et, en comparant la série $\sum\frac{1}{n^2}$ et l'intégrale $\int\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$, on montre que $\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$ (c.f. Exercice 7). On en déduit que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}-\frac{1}{2k^2}\sim-\frac{1}{2n}\qquad\text{et donc } u_n\sim\frac{1}{2n}.$$

Cadeau du *08/09/2022* :

$$\int\cos x\ln(1+\cos x)\,\mathrm{d}x\quad(\text{IPP})\qquad\int\operatorname{Arctan}x\,\mathrm{d}x\quad(\text{IPP puis CDV})$$

$$\int\operatorname{Arcsin}x\,\mathrm{d}x\quad(\text{IPP puis CDV})\qquad\int\frac{1-2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Le développement limité de Arctan est à connaître : pour le retrouver, on peut utiliser le développement de $1/(1+x^2)$ et en primitivant :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \qquad \xrightarrow{\int \cdot \mathrm{d}x} \qquad \operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots .$$

Proposition 17 (Stirling):

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Exercice 18:
L'expérience aléatoire est "on lance $2n$ fois une pièce" et l'évènement nommé A est "on obtient autant de $\mathbf{P}$ que de $\mathbf{F}$." Un résultat est une $2n$-liste de $\mathbf{P}$ et de $\mathbf{F}$. (Ce n'est pas un ensemble : l'ordre dans une liste compte.) Autrement dit, un résultat est un élément de $\{\mathbf{P},\mathbf{F}\}^{2n}$. Par exemple

$$(\underbrace{\mathbf{P},\mathbf{F},\mathbf{F},\ldots,\mathbf{P},\mathbf{F}}_{2n}) \in \{\mathbf{P},\mathbf{F}\}^{2n}$$

est un résultat possible. L'ensemble des résultats possibles est nommé "univers Ω." Dans cet exemple-ci, tous les résultats sont équiprobables. L'énoncé de l'exercice est alors de déterminer $u_n = P(A)$:

$$u_n = P(A) = \frac{\#\,\text{résultats favorables à } A}{\#\,\text{résultats possibles}} = \frac{\operatorname{Card}(A)}{\operatorname{Card}(\Omega)}.$$

On cherche la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tends vers $+\infty$. Construire un résultat de Ω, c'est choisir $\mathbf{P}$ ou $\mathbf{F}$ $2n$ fois, il y a 2^{2n} manières. On en déduit que $\operatorname{Card}(\Omega) = 2^{2n} = 4^n$. Construire un résultat de A, c'est : (1) choisir les n places prises par les $\mathbf{P}$ dans la $2n$-liste ; (2) y placer les n $\mathbf{P}$ puis ailleurs les n $\mathbf{F}$. Pour le (1), il y a $\binom{2n}{n}$ manières ; pour le (2), il y a une seule manière. On conclut que

$$\operatorname{Card}(A) = \binom{2n}{n} \times 1 = \frac{(2n)!}{n!\,(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Par équiprobabilité, la probabilité u_n de l'évènement A est

$$u_n = \frac{(2n)!/(n!)^2}{2^{2n}}.$$

D'après la formule de Stirling, on a $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$. D'où,

$$\begin{cases} (n!)^2 \sim \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi\, n \\ (2n)! \sim \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2\pi \times 2n}. \end{cases}$$

$$u_n \sim \frac{\cancel{2^{2n}}\cancel{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}\sqrt{4\pi\, n}}{\cancel{2^{2n}}\cancel{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}2\pi n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Deuxième partie
T.D.

Exercice 1

Question 10

Comme

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{n}-1\right)^n &= (-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \\ &= (-1)^n \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} \\ &= (-1)^n \mathrm{e}^{n\left(-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\ &= (-1)^n \mathrm{e}^{-1+o(1)} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

la série $\sum\left(\frac{1}{n}-1\right)^n$ diverge.

Question 12

$$\begin{aligned}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) &= \sin\left(n\pi\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right) \\ &= \sin\left(n\pi\left(1+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{8}\frac{1}{n^4}+\cdots\right)\right) \\ &= \sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{8n^3}+\cdots\right) \\ &= \cos(n\pi)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{8n^3}\right)+\sin(n\pi)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{8n^3}\right) \\ &= (-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{8n^3}+\cdots\right) \\ &= (-1)^n\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{8n^3}-\frac{\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{3!}+\cdots\right) \\ &= (-1)^n\frac{\pi}{2n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

D'où $\sum u_n = \sum(-1)^n\frac{\pi}{2n}+\sum o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or, d'après le théorème des séries alternées converge d'après le théorème des séries alternées. Et, comme $\sum\frac{1}{n^2}$ converge et $\frac{1}{n^2}$ est positive, alors $\sum o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge.

Exercice 4

Ma solution Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie telle que $\sum u_n$ converge mais ne converge pas absolument. Comme on sait que $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_n| = P_n+(-M_n)$. La série $\sum|u_n$ diverge. On suppose que seul $\sum P_n$ ou seul $\sum M_n$ diverge ; on suppose, sans perte de généralité que $\sum P_n$ diverge et que $\sum M_n$ converge vers un certain réel ℓ. Comme on sait que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = P_n+M_n$, et que $\sum u_n$ converge (vers un certain réel ℓ'), alors $\sum u_n-\sum P_n$ converge vers $\ell'-\ell$ mais $\forall n\in\mathbb{N}$, $M_n = u_n-P_n$: contradiction. On en déduit que $\sum P_n$ et $\sum M_n$ divergent.

Correction Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie telle que $\sum u_n$ converge mais ne converge pas absolument. On pose $P_n = \max(0, u_n)$ et $M_n = \min(0, u_n)$. Les suite sont, par exemple comme,

$$\begin{cases} P_n: & 0, \quad 0, \quad 8, \quad 0, \quad 0, \quad 4, \dots \\ M_n: & -1, \ -2, \quad 0, \ -3, \ -2, \quad 0, \dots \end{cases}$$

On remarque que $u_n = P_n + M_n$ et $|u_n| = P_n - M_n$. Or, $\sum u_n$ converge et $\sum u_n = \sum P_n + \sum M_n$, d'où $\sum P_n$ et $\sum M_n$ sont de même nature. On suppose que $\sum P_n$ et $\sum M_n$ convergent, ce qui est absurde car $\sum |u_n| = \sum P_n - \sum M_n$ qui diverge. On en déduit que

$$\boxed{\text{les séries } \sum P_n \text{ et } \sum M_n \text{ divergent.}}$$

Suite de l'exercice.

Si $\sum u_n$ converge mais ne converge pas absolument, alors en changeant l'ordre des termes, on peut faire converger la série $\sum u_n$ vers la limite que l'on veut. La somme n'est plus commutative.

Si $\sum u_n$ converge et converge absolument, alors la somme est commutative (la famille est sommable).

Exercice 3

Question 1

Soient n et k deux entiers naturels.

$$\int_0^1 t^{2k} \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2k+1}.$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} = \sum_{k=0}^{n} (-t^2)^k = \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} = \frac{1+(-1)^n t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

Question 2

La série $\sum(-1)^k/(2k+1)$ est alternée et, pour tout $k \geqslant 0$, $1/(2k+1) \geqslant 0$ et tends vers 0 en décroissant. On en déduit, par le théorème des séries alternées que $\sum(-1)^k/(2k+1)$ converge. On cherche maintenant sa valeur :

Soit n un entier naturel. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n \int_0^1 t^{2k} \, \mathrm{d}t &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^n t^{2k} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} \, \mathrm{d}t + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \, \mathrm{d}t \\ &= \operatorname{Arctan} 1 - \operatorname{Arctan} 0 + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Soit $t \in [0, 1[$. On sait que $\dfrac{t^{2n+2}}{1+t^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On en déduit donc que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2k+1} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 6

Soient $x \in]0, \pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos^{k-1} x \cdot \cos\big((k-1)x\big) \quad ?$$

Exercice 7

Question 1

On sait, d'après le critère de Riemann que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. La fonction ζ est donc correctement définie sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$.

Question 2

Soit x et $y \in I$ tels que $x < y$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que

$$n^x \leqslant n^y \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{n^y}$$

et, par linéarité de la somme, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^x} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^y}.$$

En passant à la limite, on obtient bien $\zeta(x) \leqslant \zeta(y)$. La fonction ζ est donc décroissante sur I.

Question 3

Soit $n \geqslant 2$ et $x \in I$. On utilise une comparaison série-intégrale :

$$\begin{array}{ccccc}
\displaystyle\int_2^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} & \leqslant & \displaystyle\int_1^{n} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \\
\| & & \| & & \| \\
\left[\dfrac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_2^{n+1} & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} & \leqslant & \left[\dfrac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_1^{n} \\
\| & & \| & & \| \\
\dfrac{(n+1)^{1-x}}{1-x} - \dfrac{2^{1-x}}{1-x} & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} & \leqslant & \dfrac{n^{1-x}}{1-x} - \dfrac{1}{1-x}
\end{array}$$

On passe à la limite pour $n \to +\infty$, on a donc

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}$$

car $1 - x \in]-\infty, 0[$.

Question 4

On sait que

$$1 + \frac{1}{x-1} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1 \qquad \text{et} \qquad 1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1.$$

Par théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$.

De même, on sait que

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \xrightarrow[x\to 1^+]{} +\infty$$

d'où, par minoration, on en déduit que $\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) = +\infty$.

Montrons que $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 1^+}{\sim} \zeta(x) - 1$: on a

$$\frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) - 1 \leqslant \frac{1}{x-1}.$$

On calcule donc

$$\frac{\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{1}{(x-1)2^{x-1}}} = \frac{(x-1)2^{x-1}}{x-1} = 2^{x-1} \xrightarrow[x\to 1^+]{} 1.$$

Exercice 2

Question 1

Soit $\alpha > 1$. On sait, d'après le critère de Riemann que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge. Ainsi, le reste R_n existe. Or, comme

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n - R_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \qquad \text{où} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha},$$

on en déduit, en passant à la limite, que la suite (R_n) tends vers 0.