Cadeaux du 14/09/22

Cadeau 1 :
Soit A un anneau commutatif et soit $x \in A$. On dit que x est nilpotent (ou nihilpotent) si

$$\exists n \in \mathbb{N},\ x^n = 0_A.$$

1. *Montrer que, si x est nilpotent, alors x n'est pas inversible mais $1_A - x$ est inversible.*
2. *Montrer que l'ensemble des éléments nilpotents de A est un idéal de A.*

Réponse du cadeau 1 :

1. On procède par l'absurde. On suppose que x est nilpotent. Soit $n \in \mathbb{N}$ le plus petit possible tel que $x^n = 0_A$. On suppose qu'il existe $y \in A$ tel que $x \cdot y = 1_A$. D'où, $(xy)^n$ est, d'une part $x^n \cdot y^n = 0_A \cdot y^n = 0_A$ par commutativité, et d'autre part, $(xy)^n = {1_A}^n = 1_A \neq 0_A$. Ce qui est absurde.
   On suppose à présent $x \neq 1_A$. On sait que $A \ni \sum_{k=0}^{n-1} x^k = (1-x^n)/(1-x) = 1/(1-x)$. On a donc trouvé l'inverse de $1-x$.
2. Soit x un élément nilpotent de A, et y un élément de A. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0_A$. $x \cdot y$ est aussi un élément nilpotent de A. En effet, $(xy)^n = x^n \cdot y^n = 0_A \cdot y^n = 0_A$. On nomme $\mathscr{I}$ l'ensemble des éléments nilpotents de A. Montrons que $(\mathscr{I}, +)$ est un sous-groupe additif de $(A,+)$. On a bien $0 \in \mathscr{I}$ car $0^k = 0$. Soient x et y deux éléments nilpotents. Montrons que $x - y \in \mathscr{I}$. Soient n_1 et $n_2 \in \mathbb{N}^\star$ tels que $x^{n_1} = 0$ et $y^{n_2} = 0$. On veut montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $(x-y)^n = 0$. Soit $n = n_1 + n_2$. On a

$$(x-y)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n_1} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^y y^{n-k}}_{(1)} + \underbrace{\sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^y y^{n-k}}_{(2)}.$$

   Or, dans la somme (1), $n - k = n_1 + n_2 - k = n_2 + (n_1 - k) \geqslant n_2$ et, dans la somme (2), $k \geqslant n_1$.

Cadeau 2 :
Soit F l'ensemble des matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ -5y & x+4y \end{smallmatrix}\right)$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On note $J = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

1. *Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et que (I_2, J) est une base de F.*
2. *Calculer J^2 puis $(x\, I_2 + yJ) \cdot (x'\, I + y'\, J)$ pour tout $(x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4$. Qu'en déduire ?*

Réponse du cadeau 2 :

1. On cherche à trouver $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ tels que $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ -5 & x+4y \end{smallmatrix}\right) = \alpha I_2 + \beta J$. On a

$$\begin{aligned}
\alpha I_2 + \beta J &\iff \begin{pmatrix} x & y \\ -5y & x+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\beta & \beta \\ -5\beta & 2\beta \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x = \alpha - 2\beta \\ y = \beta \\ -5\beta = -5y \\ 2\beta + \alpha = x + y \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \beta = y \\ \alpha = x + 2y \end{cases}
\end{aligned}$$

2. On a $J^2 = -I_2$ et, en calculant minutieusement, on trouve, pour tout $(x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4$, $(x\, I_2 + y\, J) \cdot (x'\, I_2 + y'\, J) = \cdots = (xx' - yy')\, I_2 + (x'y + xy')\, J$. On remarque que $(F, +, \cdot)$ est isomorphe à $(\mathbb{C}, +, \times)$. C'est un isomorphisme d'anneaux. Or, comme l'anneau $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps donc F l'est aussi.

Cadeau du 19/09/22

Cadeau :
Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. On pose $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorphisme défini tel que

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} f(\vec{\imath}) & f(\vec{\jmath}) & f(\vec{k}) \end{array} & \end{array} = [f]_{(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})}.$$

Interpréter géométriquement f.

Réponse du cadeau :
Soit $\mathscr{B}$ une base et $A = [f]_{\mathscr{B}}$, alors $f(\vec{\imath}) = \vec{\jmath}$, $f(\vec{\jmath}) = \vec{k}$, et $f(\vec{k}) = \vec{\imath}$. f est la rotation d'angle ${}^{2\pi}/_{3}$ autour de $\mathrm{Vect}(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k})$.

On peut également le montrer en décomposant $f = g \circ h$, où g est la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(\vec{\imath} + \vec{\jmath}, \vec{k})$ et parallèlement à $\mathrm{Vect}(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$; et h la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(\vec{\imath} + \vec{k}, \vec{\jmath})$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(\vec{\imath}, \vec{k})$.

Cadeaux du 22/09/22

Cadeau 1 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite positive, telle que la suite* $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ *diverge. En calculant* $\ln \frac{S_n}{S_{n-1}}$, *montrer que la série* $\sum \frac{u_n}{S_n}$ *diverge.*

Cadeau 2 :
On pose

$$D(x) = \begin{vmatrix} 7-x & 14-x & 3-x \\ 8-x & 2-x & -x \\ 13-x & -1-x & 2-x \end{vmatrix}.$$

Montrer qu'il existe deux réels α *et* β *tels que, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $D(x) = \alpha x + \beta$. *Déterminer* α *et* β.

Cadeau du 23/09/22

Cadeau :
Montrer qu'il n'existe pas $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ *telle que,* $A' = P^{-1}AP$ *où*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textit{et} \qquad A' = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

Réponse du cadeau :

Analyse On suppose $P^{-1}AP = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right)$. Alors, $\det A = \det A'$, d'où $0 = \lambda \cdot \mu$. Et, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A'$, d'où $\lambda + \mu = 0$. On en déduit donc que $\lambda = 0 = \mu$.

Synthèse On a

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

D'où, en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}, on a

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On en conclut que la matrice A n'est pas diagonalisable.

Cadeaux du 28/09/22

Cadeau 1 :
On considère la matrice

$$M = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccc} & & \\ \end{array} \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} f(\vec{\imath}) & f(\vec{\jmath}) & f(\vec{k}) \end{array} & \end{array} = \Big[\, f \,\Big]_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}.$$

Trouver et interpréter un vecteur propre et une valeur propre de M (et, de même, de f).

Indication :
On a $M\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$ est un vecteur directeur de l'axe de rotation. Montrer que les seuls vecteurs propres sont colinéaire au vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Cadeaux du 06/10/22

Cadeau :
On considère la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Quel est le spectre de la matrice A ?*
2. *Déterminer une base de chaque sous-espace propre de la matrice A.*
3. *Montrer que la matrice A est trigonalisable mais pas diagonalisable.*
4. *Soit T la matrice ci-dessous. Déterminer une matrice P telle que $P^{-1} \cdot A \cdot P = T$:*
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
5. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système d'équation différentielle (Σ) ci-dessous :*
$$(\Sigma) : \begin{cases} x'(t) = y(t) + z(t) \\ y'(t) = -x(t) + y(t) + z(t) \\ z'(t) = -x(t) + y(t) + 2z(t) \end{cases}$$

Réponse au cadeau 1 :

1. On calcule
$$\begin{aligned} \chi_A(x) = \det(xI_3 - A) &= \begin{vmatrix} x & -1 & -1 \\ 1 & x-1 & -1 \\ 1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} \\ &= x \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ x-1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= x\big((x-1)(x-2) - 1\big) - (2-x) - 1 + (-1 + x - 1) \\ &= x(x^2 - 3x + 1) - 2 + 2x \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\ &= (x-1)^3 \end{aligned}$$

   On en déduit que
$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1\}.}$$

2. On cherche une base de SEP(1) : on cherche $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, tel que $AX = X$.
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} y + z = x \\ -x + y + z = y \\ -x + y + 2z = z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases} \\ &\iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\iff X \in \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Ainsi, la base $\mathscr{B} = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$.

3. La matrice A n'est pas diagonalisable : en effet, on a $\dim \mathbb{R}^3 = 3 \neq \dim(\mathrm{SEP}(1)) = 1$. Mais, le polynôme χ_A est scindé donc la matrice A est trigonalisable.
4. On cherche $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = T = \begin{array}{c c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 . \\ \varepsilon_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) \end{array} & \end{array}$$

On cherche donc $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{cases} f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 & (1) \\ f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 & (2) \\ f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 & (3). \end{cases}$$

On choisit $\varepsilon_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, d'après la question 2. Puis, on calcule

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ -x + z = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = z \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\iff \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On choisit donc $\varepsilon_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ (en choisissant $x = 0$). De même, on choisit $\varepsilon_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Donc, si

$$P = \begin{array}{c c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{array} & \end{array}$$

alors $P^{-1} \cdot A \cdot P$, et on a bien $\det P = 1$.

5.

$$\begin{aligned} (\Sigma) &\iff X'(t) = A \cdot X(t) \text{ où } X(t) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \\ &\iff U'(t) = T \cdot U(t) \text{ où } U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot X(t) \\ &\iff \begin{cases} u'(t) = u(t) + v(t) & (1) \\ v'(t) = v(t) + w(t) & (2) \\ w'(t) = w(t) & (3) \end{cases} \end{aligned}$$

D'où

$$(3) \iff \exists K \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ w(t) = K\mathrm{e}^t,$$

et

$$(2) \iff v'(t) - v(t) = K\mathrm{e}^t.$$

On résout l'équation homogène associé :

$$v'(t) = v(t) \iff \exists L \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ v(t) = L\mathrm{e}^t.$$

On pose $v(t) = \ell(t)\,\mathrm{e}^t$, et donc

$$\begin{aligned}(2) \iff & \ell'(t)\,\mathrm{e}^t + \ell(t)\,\mathrm{e}^t - \ell(t)\,\mathrm{e}^t = K\mathrm{e}^t \\ \iff & \ell'(t) = K \\ \iff & \ell(t) = K\,t + L \\ \iff & v(t) = (Kt + L)\,\mathrm{e}^t\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}(1) \iff & u'(t) = u(t) + v(t) = u(t) + (Kt + L)\,\mathrm{e}^t \\ \iff & u(t) - u(t) = (Kt + L)\,\mathrm{e}^t\end{aligned}$$

On résout l'équation homogène associée :

$$u'(t) - u(t) = 0 \iff \exists M \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}\ u(t) = M\mathrm{e}^t.$$

On pose $u(t) = m(t)\,\mathrm{e}^t$.

$$\begin{aligned}(2) \iff & m'(t)\,\mathrm{e}^t - m(t) = (Kt + L)\,\mathrm{e}^t \\ \iff & m'(t) = Kt + L \\ \iff & m(t) = \frac{1}{2}Kt^2 + Lt + M \\ \iff & u(t) = \left(\frac{1}{2}Kt^2 + Lt + M\right)\,\mathrm{e}^t\end{aligned}$$

Ainsi,

$$(\Sigma) \iff \exists (K, L, M) \in \mathbb{R}^3,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} u(t) = \left(\frac{1}{2}Kt^2 + Lt + M\right)\,\mathrm{e}^t \\ v(t) = (Kt + L)\,\mathrm{e}^t \\ w(t) = K\,\mathrm{e}^t. \end{cases}$$

Or, $X(t) = P \cdot U(t)$, et donc

$$\begin{aligned}(2) \iff & \exists (K, L, M) \in \mathbb{R}^3,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x(t) = u(t) \\ y(t) = v(t) - w(t) \\ z(t) = u(t) + w(t) \end{cases} \\ \iff & \exists (K, L, M) \in \mathbb{R}^3,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x(t) = \left(\frac{1}{2}Kt^2 + LT + M\right)\mathrm{e}^t \\ y(t) = (Kt + L - K)\,\mathrm{e}^t \\ z(t) = \left(\frac{1}{2}Kt^2 + Lt + M + K\right)\mathrm{e}^t \end{cases}\end{aligned}$$

Cadeau 2 (matrices stochastiques) :
Soit une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que*

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ a_{i,j} \geqslant 0 \qquad \textit{et} \qquad \forall i \in [\![1, n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

1. *Montrer que* $1 \in \mathrm{Sp}(A)$.
2. *Montrer que, si* λ *est une valeur propre de* A*, alors* $|\lambda| \leqslant 1$.

Cadeau 3 (matrices à diagonale strictement dominante) :
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que*

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ |a_{i,j}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A *est inversible.*

Cadeau du 12/10/22

Cadeau :
Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tell que $A^2 = -I_2$. Montrer qu'il existe P une matrice inversible telle que

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M.$$

Réponse au cadeau

On remarque que $A \sim \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)$. D'où, il existe $\varepsilon \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{C})$, tel que $A \cdot \varepsilon = i\varepsilon$. Également, $A \cdot \bar{\varepsilon} = -i\bar{\varepsilon}$. Soient $U = \varepsilon + \bar{\varepsilon} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, et $V = i(\varepsilon + \bar{\varepsilon}) \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, puis on calcule

$$\begin{aligned} A \cdot U &= A \cdot \varepsilon + A \cdot \bar{\varepsilon} \\ &= i\varepsilon - i\bar{\varepsilon} \\ &= i(\varepsilon - \bar{\varepsilon}) \\ &= V. \end{aligned}$$

Cadeau du 19/10/22

Cadeau :

Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$, telle que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

1. *Montrer que ça n'implique pas que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.*
2. *Montrer que, si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $\ell = 0$.*
3. *Montrer que, si f est uniformément continue, alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.*

Réponse du cadeau :

1. c.f. remarque 7 du cours
2. Quitte à remplacer ℓ par $-\ell$, on suppose $\ell > 0$. Ainsi, il existe $X \geqslant 0$ tel que
$$\forall x \geqslant X,\ f(x) \geqslant \frac{\ell}{2}.$$
Or, l'intégrale
$$\int_X^{+\infty} \frac{\ell}{2}\,\mathrm{d}x$$
diverge. D'où
$$\int_X^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$
diverge également. Ce qui est absurde. On en déduit que $\ell = 0$.
3. On suppose f uniformément continue. Par l'absurde, supposons que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$, d'où
$$\exists \varepsilon > 0,\ \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tendant vers } +\infty,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) \geqslant \varepsilon.$$
Or, comme f est uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad |x - u_n| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
D'où,
$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{d}t$$
qui diverge. Ce qui est absurde.

Cadeau du 21/10/22

Théorème d'interpolation de Lagrange

Cadeau :
Soient $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ une suite de $n+1$ réels distincts deux à deux. Soient aussi $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ une suite de $n+1$ réels (qui peuvent être égales). Alors,

$$\exists! P \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall k \in [\![0, n]\!]\,,\ P(a_k) = b_k.$$

Réponse du cadeau :

Méthode 1 Soient $n+1$ réels a_0, a_1, …, a_n distincts deux à deux. L'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\longmapsto \Big(P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)\Big) \end{aligned}$$

est linéaire et la dimension de l'espace vectoriel de départ est égale à la dimension de l'espace vectoriel d'arrivée. Soit P un polynôme réel de degré au plus n.

$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker} f &\iff f(P) = (0, 0, \dots, 0) \\ &\implies P(a_1) = P(a_2) = \cdots = P(a_n) = 0 \\ &\implies P \text{ a au moins } n+1 \text{ racines} \\ &\implies P = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \text{ car } \#\text{racines} > \deg(P) \end{aligned}$$

D'où $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$. On en déduit que f est injective. Et, d'après le théorème du rang, f est surjective (car $\dim \mathbb{R}_n[X] = \dim \mathbb{R}^{n+1}$).

Méthode 2 On reprend la fonction f de la méthode 1. Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$: $\mathscr{B} = (1, X, \dots, X^n)$; et, soit $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$: $\mathscr{C} = (e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$. On a

$$[f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{C}} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^n & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^n & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^n & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} & \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_{n+1} \end{matrix} \\ \begin{matrix} f(1) & f(X) & f(X^2) & \dots & f(X^n) \end{matrix} & \end{array} = V.$$

On reconnaît un déterminant de Vandermonde :

$$\begin{aligned} \det V = &(a_n - a_{n-1}) \cdots (a_n - a_1)(a_n - a_0) \\ &\times (a_{n-1} - a_{n-2}) \cdots (a_{n-1} - a_{n-2}) \cdots (a_{n-1} - a_0) \\ &\times \\ &\vdots \\ &\times (a_2 - a_1) \cdot (a_2 - a_0) \\ &\times (a_1 - a_0) \\ &= \prod_{i>j} (a_i - a_j) \end{aligned}$$

D'où $\det V \neq 0$ car les (a_i) sont distincts deux à deux. Donc V est inversible, et d'où f est bijective.

Méthode 3 On va prouver la surjectivité en déterminant **un** polynôme P tel que $P(a_0) = b_0$, $P(a_1) = b_1$, ..., $P(a_n) = b_n$. Le voilà :

$$\begin{aligned} P = {} & b_0 \frac{(X-a_1)(X-a_2)\cdots(X-a_n)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\cdots(a_0-a_n)} \\ & + b_1 \frac{(X-a_0)(X-a_1)\cdots(X-a_n)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)\cdots(a_1-a_n)} \\ & \vdots \\ & + b_n \frac{(X-a_0)(X-a_1)\cdots(X-a_{n-1})}{(a_n-a_0)(a_n-a_1)\cdots(a_n-a_{n-1})}. \end{aligned}$$

Ce polynôme interpole les $n+1$ points et $\deg P \leqslant n$.

Cadeau du 08/11/22

Dénombrement

Cadeau :

1. *Calculer, de deux manières,* $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$. *(binôme et dénombrement)*
2. *(Petite formule de* Pascal*) Calculer* $p\binom{n}{p}=n\binom{n-1}{p-1}$.
3. *(Formule de* Vandermonde*) Montrer, de deux manières, que* $\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{p}\binom{b}{n-p}=\binom{a+b}{n}$. *(développement de* $(1+x)^{a+b}$ *et dénombrement)*
4. *Montrer, de deux manières, que* $\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}$ *(télescope et dénombrement)*

Réponse du cadeau :

1. On développe, à l'aide du binôme de Newton, $2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1^k\cdot 1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.
   Autre méthode : $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ est le nombre de parties d'un ensemble à n éléments. Construire une partie à n éléments, c'est : choisir ou non le premier élément (2 manières), choisir ou non le second élément (2 manière), …, etc jusqu'au n-ième élément. Il y a donc 2^n manières.
2. Soit E un ensemble à n éléments. Soit A une partie de E à p éléments, et soit B sont complémentaire dans E. L'application
   $$\begin{aligned} f:\{X\subset A\mid |X|=a+b\} &\longrightarrow \dot{\bigcup_{k=0}^{n}}\{X\subset A\mid |X|=k\}\cup\{X\subset B\mid |X|=n-k\}\\ X &\longmapsto (X\cap A, X\cap B)\end{aligned}$$
   est bijective. (L'application $(X,Y)\mapsto X\cup Y$ est sa réciproque.) Ainsi,
   $$|\{X\subset A\mid |X|=a+b\}|=\sum_{k=0}^{n}|\{X\subset A\mid |X|=k\}|\cdot|\{X\subset A\mid |X|=n-k\}|,$$
   d'où $\binom{a+b}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.
   Moins rigoureusement, choisir n éléments de E, c'est choisir 0 éléments de A et n éléments de B (il y en a $\binom{a}{0}\binom{b}{n}$), ou 1 élément de A et $n-1$ éléments de B (il y en a $\binom{a}{1}\binom{b}{n-1}$), ou… On en conclut qu'il y a $\sum_{p=0}^{n}\binom{a}{p}\binom{b}{n-p}$ manières de choisir n éléments dans E. Mais, c'est aussi $\binom{a+b}{n}$.
   Autre méthode : on a d'une part $(1+X)^{a+b}=\sum_{k=0}^{a+b}\binom{a+b}{k}X^k$. Et, d'autre part,
   $$(1+X)^{a+b}=(1+X)^a\times(1+X)^b=\Big(\sum_{p=0}^{a}\binom{a}{p}X^p\Big)\Big(\sum_{q=0}^{b}\binom{b}{q}X^q\Big).$$
   Or, deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux deux-à-deux. D'où
   $$\binom{a+b}{n}=\sum_{p+q=n}\binom{a}{p}\binom{b}{q}=\sum_{p=0}^{n}\binom{a}{p}\binom{b}{n-p}.$$
3. On a
   $$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\sum_{k=p}^{n}\left(\binom{k+1}{p+1}-\binom{k}{p+1}\right)=\binom{n+1}{p+1}-\binom{p}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}.$$
   Autre méthode : dénombrement. Je choisis $p+1$ éléments parmi $n+1$. On pose $k+1$ le plus grand éléments de ces éléments choisis : $p+1\leqslant k+1\leqslant n+1$, d'où $p\leqslant k\leqslant n$. Ainsi, on doit donc choisir encore p autres éléments dans $[\![1,k]\!]$ (car ces éléments sont plus petits que n).

Cadeau du 01/12/22

Cadeau :
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. *Montrer que* $\operatorname{Ker}(A^\top \cdot A) = \operatorname{Ker} A$.

Réponse du cadeau :
On procède par double-inclusion.

- "$\supset$" Soit $X \in \operatorname{Ker} A$. Alors, $A \cdot X = 0$. Ainsi, $A^\top \cdot A \cdot X = A^\top \cdot 0 = 0$. On a bien $\operatorname{Ker}(A^\top \cdot A) \supset A$.
- "$\subset$" Soit $X \in \operatorname{Ker}(A^\top \cdot A)$. Alors $A^\top \cdot A \cdot X = 0$, d'où $X^\top \cdot (A^\top \cdot A \cdot X) = 0$. Ainsi, $(X^\top \cdot A^\top) \cdot (A \cdot X) = 0$, donc $(A \cdot X)^\top \cdot (A \cdot X) = 0$. Mais, avec le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a donc $\|A \cdot X\|^2 = 0$. Par le caractère défini du produit scalaire, on a bien $A \cdot X = 0$ et donc $X \in \operatorname{Ker} A$. D'où $\operatorname{Ker}(A^\top \cdot A) \subset \operatorname{Ker} A$.

Cadeau du 02/12/22

Lemme de Borel-Cantelli

Cadeau :
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, et soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. On pose $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \big(\bigcup_{k\geqslant n} E_k\big)$.

1. *On suppose que la série $\sum P(E_n)$ converge. En encadrement judicieusement $P(F)$, montrer que $P(F) = 0$.*
2. *On suppose à présent que les événements E_n sont indépendants et que la série $\sum P(E_n)$ diverge.*
   - (a) *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $N \geqslant n$, $\ln P\big(\bigcap_{p=n}^N \bar{E}_p\big) \leqslant -\sum_{p=n}^N P(E_p)$.*
   - (b) *En déduire $\lim_{N\to\infty} P\big(\bigcap_{p=n}^N \bar{E}_p\big)$.*
   - (c) *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P\big(\bigcap_{p\geqslant n} \bar{E}_p\big) = 0$.*
   - (d) *Conclure que $P(F) = 1$.*

Réponse du cadeau :

1. On pose, pour $k \in \mathbb{N}$, l'événement $A_n = \bigcup_{k\geqslant n} E_k$. On a $A_n = A_{n+1} \cup E_n \supset A_{n+1}$, la suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (pour l'inclusion). Ainsi, par continuité décroissante,
$$P\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$
Or, comme la série $\sum P(E_n)$ converge, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par σ-sous-additivité,
$$0 \leqslant P(A_n) = P\Big(\bigcup_{k\geqslant n} E_k\Big) \leqslant \sum_{k\geqslant n} P(E_k),$$
et il s'agit du reste de la série convergente $\sum P(E_n)$, qui tends vers 0. D'où, par le théorème des gendarmes, $P(A_n)$ tend vers 0 quand $n \to \infty$. On en déduit que
$$\boxed{P(F) = 0.}$$

2. (a) Comme les événements E_p sont indépendants, les événements $\bar{E}_p$ le sont aussi. Ainsi, $P\big(\bigcap_{p=n}^N \bar{E}_p\big) = \prod_{p=n}^N P(\bar{E}_p)$, et donc
$$\begin{aligned}\ln P\Big(\bigcap_{p=n}^N \bar{E}_p\Big) &= \sum_{p=n}^N \ln P(\bar{E}_p)\\ &= \sum_{p=n}^N \ln\big(1 - P(E_p)\big)\\ &\leqslant \sum_{p=n}^N \big(-P(E_p)\big) \text{ car } \ln(1+x) \leqslant x\\ &\leqslant -\sum_{p=n}^N P(E_p).\end{aligned}$$

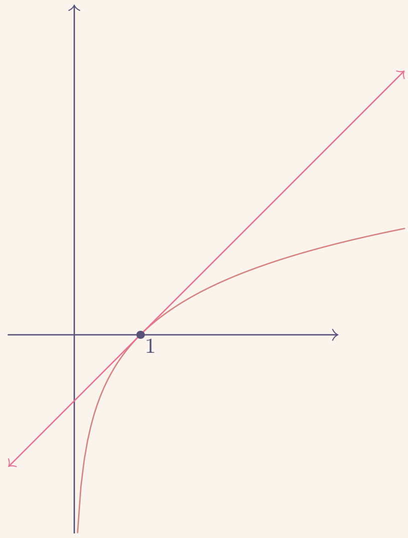

Figure 1 – Concavité de la fonction ln

(b) Comme, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $P(E_p) \geqslant 0$, donc la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}} = \big(\sum_{p=n}^{N} P(E_p)\big)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante, elle admet donc une limite. De plus, par hypothèse, la série $\sum P(E_p)$ diverge donc $\lim_{N\to\infty} -S_n = -\infty$. Par composition des limites, $\lim_{N\to\infty} \ln P\big(\bigcap_{p=n}^{N} \bar{E}_p\big) = -\infty$. Enfin, comme l'exponentielle est croissante,

$$0 \leqslant P\Big(\bigcap_{p=n}^{N} \bar{E}_p\Big) \leqslant \exp\Big(-\sum_{p=n}^{N} P(E_p)\Big).$$

Comme $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, on en déduit par le théorème des gendarmes, que

$$\lim_{N\to\infty} P\Big(\bigcap_{p=n}^{N} \bar{E}_p\Big) = 0.$$

(c) Par continuité décroissante, on a donc

$$P\Big(\bigcap_{n\geqslant p} \bar{E}_p\Big) = \lim_{N\to\infty} P\Big(\bigcap_{p=n}^{N} \bar{E}_p\Big) = 0.$$

(d) On rappelle que $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geqslant n} E_p$. Or, on sait que $\bigcap_{p\geqslant n} \bar{E}_p = \overline{\bigcup_{p\geqslant n} E_p}$. On a doc $P\big(\bigcup_{p\geqslant N}\big) = 1 - P\big(\bigcap_{p\geqslant n} \bar{E}_p\big) = 1$. Do,c les événements $\bigcup_{p\geqslant n} E_p$ sont presque certains. Or, l'intersection d'événements presque certains est presque certaine. D'où $P(F) = 1$.

Cadeau du 05/12/22

Oral CCP PSI 2018

Cadeau :
Soit $(A_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ *une famille d'événements d'un espace probabilisé* $(\Omega, \mathscr{A}, P)$*. Montrer que*

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) \leqslant P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) + n - 1.$$

Réponse du cadeau :
On a

$$\begin{aligned} n - \sum_{k=1}^{n} P(\bar{A}_k) &= \sum_{k=1}^{n} \big(1 - P(A_k)\big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(\bar{A}_k) \\ &\geqslant P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} \bar{A}_k\Big) \\ &= 1 - P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) \end{aligned}$$

D'où,

$$\sum_{k=1}^{n} P(\bar{A}_k) \leqslant P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big) + n - 1.$$

Cadeau du 08/12/22

Cadeau :
La forme

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (P,Q) &\longmapsto \int_0^\pi P(\cos t)Q(\cos t)\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

est un produit scalaire ?

Cadeau du 13/12/22

Cadeau :

1. *Soit $n \in \mathbb{N}$. En remarquant que $(1+X)^n \cdot (1+X)^n = (1+X)^{2n}$, montrer que*
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$
2. *Montrer que*
$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}\Big)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \binom{2n}{n}^2.$$

Réponse du cadeau :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que
$$\begin{aligned}(1+X)^n \cdot (1+X)^n &= \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \sum_{p+q=k} \binom{n}{p}\binom{n}{q} X^k\end{aligned}$$

   D'autre part, on sait que
$$(1+X)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k.$$
   Or, deux polynômes sont égaux si, et seulement s'ils ont les mêmes coefficients. On regarde le coefficient X^n en posant $k = n$:
$$\binom{2n}{n} = \sum_{p+q=n} \binom{n}{p}\binom{n}{q} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}\binom{n}{n-p} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

2. La série $\sum \frac{1}{(n!)}$ converge absolument car $\frac{1}{(n!)^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi, par produit de Cauchy,
$$\begin{aligned}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}\Big) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p+q=n} \frac{1}{(p!)^2} \frac{1}{(q!)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(p!)^2} \frac{1}{(n-p)!^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2 \frac{1}{(n!)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \times \Big(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2\Big) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \times \binom{2n}{n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \times \frac{(2n)!}{n! \times n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n!)} \binom{2n}{n}^2.\end{aligned}$$

Cadeaux du 14/12/22

CCP PSI 2010, Centrale PSI 2014 & TPE PSI 2014

Cadeau 1 :
Soient $n \geqslant 2$ et

$$\begin{aligned} \Phi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto M^\top. \end{aligned}$$

Déterminer les éléments propres, la trace et le déterminant de Φ.

Correction du cadeau 1 :
On a $\Phi^2 = \mathrm{id}$ donc X^2-1 annule Φ. D'où, $\mathrm{Sp}(\Phi) \subset \{-1, 1\}$. Et, $\forall M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $\Phi(M) = M^\top = M = 1 \times M$. De plus, $\forall M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, $\Phi(M) = M^\top = -M = -1 \times M$. D'où $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SEP}(1)$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SEP}(-1)$. Mais, $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = n(n+1)/2$ et $\dim \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = n(n-1)/2$. Donc $\mathrm{SEP}(1) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SEP}(-1) = \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. L'endomorphisme Φ possède un polynôme annulateur scindé à racines simples, il est donc diagonalisable. En se plaçant dans une base $\mathscr{B}$ adaptée : la concaténation d'une base de $\mathscr{S}_n$ et d'une base de $\mathscr{A}_n$, on a

$$[\Phi]_{\mathscr{B}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \frac{n(n+1)}{2} \\ \\ \frac{n(n-1)}{2} \end{array}.$$

On a donc $\operatorname{tr} \Phi = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2}{2}n = n$, et $\det \Phi = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Cadeau 2 :
Soit $V = \{u \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) \mid \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ u(M^\top) = [u(M)]^\top\}$. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$ et déterminer sa dimension.

Correction du cadeau 2 :
On a bien $\tilde{0} \in V$ donc $V \neq \varnothing$. Soient $u, v \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} (\lambda u + \mu v)(M^\top) &= \lambda u(M^\top) + \mu v(M^\top) \\ &= \lambda\big(u(M)\big)^\top + \mu\big(v(M)\big)^\top \\ &= (\lambda u + \mu v)(M)^\top \end{aligned}$$

donc $\lambda u + \mu v \in V$. Ainsi, V est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$.

- Soit $u \in V$. Pour toute matrice antisymétrique $A \in \mathscr{A}_n$, $u(A^\top) = u(A^\top) = -u(A)$, d'où $u(A) \in \mathscr{A}_n$. De même, pour toute matrice symétrique $S \in \mathscr{S}_n$, $u(S^\top) = u(S) = u(S)^\top$ donc $u(S) \in \mathscr{S}_n$.
- Soit $u \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$ un endomorphisme tel que $u(\mathscr{A}_n) \subset \mathscr{A}_n$ et $u(\mathscr{S}_n) \subset \mathscr{S}_n$. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On décompose M en $M = A + S$ avec $A \in \mathscr{A}_n$ et $S \in \mathscr{S}_n$.

$$\begin{aligned} u(M^\top) &= u(A^\top + S^\top) \\ &= u(A^\top) + u(S^\top) \\ &= -u(A) + u(S) \\ &= u(A)^\top + u(S)^\top \\ &= u(M)^\top \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\dim V &= \dim^2 \mathscr{A}_n + \dim^2 \mathscr{S}_n\\ &= \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\\ &= \frac{n^2}{4}(n^2-2n+1+n^2+2n+1)\\ &= \frac{1}{2}n^2(n^2+1).\end{aligned}$$

En effet, soit $\mathscr{B}$ une base adaptée à la somme $\mathscr{A}_n \oplus \mathscr{S}_n = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$[u]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \star & 0 \\ 0 & \star \end{pmatrix}.$$

Cadeau 3 :

(a) *Soit $d \in \mathbb{N}^\star$, $a \in \mathbb{C}$ et*

$$\begin{aligned} u : \mathbb{C}_d[X] &\longrightarrow \mathbb{C}_d[X] \\ P &\longmapsto (X-a)P'. \end{aligned}$$

Déterminer les éléments propres de u.

(b) *En déduire l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ divisibles par leur dérivée.*

Réponse du cadeau 3 :

(a) On a $u(k) = 0 = 0 \times k$ avec $k \in \mathbb{C}$. De même, on remarque que,

$$\forall k \in [\![1, d]\!],\ u\big((X-a)^k\big) = k(X-a)^{k-1} \cdot (X-a) = k \times (X-a)^k.$$

Ainsi, $(X-a)^k \in \operatorname{Ker}(k\operatorname{id} - u)$. L'endomorphisme u possède $d+1$ valeurs propres distinctes deux à deux. Or, $\dim \mathbb{C}_d[X] = d+1$, donc u est diagonalisable. Et, $\forall k \in [\![0, d]\!]$, $\operatorname{Ker}(k\operatorname{id} - u) = \operatorname{Vect}\big[(X-a)^k\big]$. Donc $\operatorname{Sp}(u) = [\![0, d]\!]$.

Autre solution : la base $\mathscr{B} = \big((X-a)^0, (X-a)^1, \dots, (X-a)^d\big)$ est adaptée. En effet, dans cette base

$$[u]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & d \end{pmatrix}.$$

(b) — Analyse. Soit P un polynôme de degré $d \geqslant 1$, tel que $P' \mid P$. Alors, $P = \frac{1}{d}(X-a) \times P'$. D'où, $u(P) = (X-a)P' = dP$.
— Synthèse. ok.

Cadeaux du 15/12/22

Centrale PC 2016, X ESPCI PC 2013 & X ESPCI PC 2014, 2015

Cadeau 1 :
Soit $\mathscr{D}_n$ l'espace des matrices diagonales et $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)$. Montrer que $(I_n, D, \dots, D^{n-1})$ est une base de $\mathscr{D}_n$ si, et seulement si les réels d_i sont distincts deux à deux.

Réponse du cadeau 1 :

$$\begin{aligned}
& (I_n, D, \dots, D^{n-1}) \text{ est une base de } \mathscr{D}_n \\
\iff & \forall (a_0, \dots, a_{n-1}), \quad a_0 I_n + a_1 D + \cdots + a_{n-1} D^{n-1} = 0 \implies a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} \\
\iff & \forall (a_0, \dots, a_{n-1}), \quad \begin{cases} a_0 + a_1 d_1 + \cdots + a_{n-1} d_1^{n-1} & = 0 \\ \quad \vdots & \ddots \vdots \\ a_0 + a_1 d_n + \cdots + a_{n-1} d^{n-1} & = 0 \end{cases} \implies a_0 = \cdots = a_{n-1} = 0 \\
\iff & \forall (a_0, \dots, a_{n-1}), \begin{pmatrix} 1 & d_1 & \dots & d_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & d_n & \dots & d_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = 0 \implies a_0 = \cdots = a_{n-1} = 0 \\
\iff & \text{ les réels } d_i \text{ sont distincts deux à deux.}
\end{aligned}$$

car on reconnaît le déterminant de Vandermonde.

Cadeau 2 :
Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul.

(a) *Montrer que $V = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid M \cdot X = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et déterminer la dimension.*

(b) *Montrer que l'ensemble W des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont X est un vecteur propre, est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et que $\dim W = ?$.*

Réponse du cadeau 2 :

(a) Soit $M = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$ la matrice nulle. On a $M \cdot X = 0$, donc $0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \in V$. Soient $M, N \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a $(\lambda M + \mu N) \cdot X = \lambda M \cdot X + \mu N \cdot X = 0$, donc $\lambda M + \mu N \in V$. On en déduit que V est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On se place dans une base adaptée $\mathscr{B} = (X, X_2, \dots, X_n)$ où on a complété la famille X par des vecteurs $X_2, \dots, X_n$. Soit f l'endomorphisme représenté, dans une base, par M. Ainsi,

$$\begin{aligned}
M \in V & \iff M \cdot X = 0 \\
& \iff f(x) = 0 \text{ où } X \text{ est la matrice de } x \text{ dans la même base} \\
& \iff \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ P^{-1} \cdot M \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \star & \dots & \star \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\dim V = n^2 - n.}$$

(b) Soit $M = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$ la matrice nulle. On a $M \cdot X = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} = 0_{\mathbb{R}} \cdot X$, donc $0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})} \in W$. Soient $M, N \in W$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Soit α la valeur propre associée au vecteur propre X pour la matrice M. Soit β la valeur propre associée au vecteur propre X pour la matrice N. Ainsi, $(\lambda M + \mu N) \cdot X = \lambda M \cdot X + \mu N \cdot X = \lambda\alpha X + \mu\beta X = (\lambda\alpha + \mu\beta) \cdot X$. On en déduit que $\lambda M + \mu N \in W$. Ainsi, W est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

De même, dans la même base adaptée

$$M \in W \iff \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \star & \star & \dots & \dots & \star \\ 0 & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \star & \dots & \dots & \star \end{pmatrix}$$

D'où,

$$\boxed{\dim W = n^2 - n + 1.}$$

Cadeau du 10/01/23

Cadeau :
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum x^{(n^2)}$.

Réponse du cadeau :
On pose (u_n) le terme général de la série. Son rayon de convergence vaut 1. En effet, si $x = 1$, la série $\sum 1$ diverge, d'où $R \leqslant 1$. De plus, si $|x| < 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant |x|^n$. Or, la série $\sum |x|^n$ converge, donc $\sum |u_n|$ aussi, d'où $R \geqslant 1$ et donc $R = 1$.

Cadeau du 13/01/23

Cadeau :
Soient F et G deux espaces d'un espace préhilbertien[1] *Montrer que, si $F \oplus G = E$ et $F \perp G$, alors $G = F^{\top}$ et $F = G^{\top}$.*

1. il n'y a donc aucune hypothèses sur la dimension de E.

Cadeau du 18/01/23

Cadeau :
Soient $\sum a_n z^n$ une série entière, et R son rayon de convergence. On considère la série entière $\sum {a_n}^n\, z^n$ de rayon de convergence R'.

1. *Montrer que,*
   (a) *si $R > 1$, alors $R' = +\infty$;*
   (b) *si $R < 1$, alors $R' = 0$.*
2. *Que se passe-t-il si $R = 1$?*

Réponse du cadeau :

1. (a) Soit $x \in]-R, R[$. On a $R > 1$, d'où $\sum |a_n| 1^n$ converge, d'où $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Ainsi, à partir d'un certain rang, $|a_n x| \leqslant \lambda$, où $0 < \lambda < 1$ et donc $|a_n x|^n \leqslant \lambda^n$. Or, la série $\sum \lambda^n$ converge, d'où $\sum a_n x^n$ converge. On en déduit $R' = +\infty$.
   (b)
2. On considère la série géométrique $\sum x^n$: on pose $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le rayon de convergence de cette série est $R = 1$. Mais, $\sum {a_n}^n x^n = \sum x^n$, et donc $R' = 1$.
   On considère la série $\sum \frac{x^n}{n}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $a_n = \frac{1}{n}$. Soit $x \in R$. On pose $u_n = |{a_n}^n x^n|$ pour $n \in \mathbb{N}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|^n |a_{n+1}|\,|x| \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

   D'où $\sum u_n$ converge, et donc $R' = +\infty$.

Cadeau du 18/01/23

Banque PT 2006 Maths C

Cadeau :
Trouver les solutions développables en séries entières de l'équation différentielle

$$16\,(x^2 - x)\,y'' + (16x - 8)\,y' - y = 0.$$

Indication : Il faut montrer que

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ est une solution } \iff \forall n,\ a_{n+1} = \frac{(4n+1)(4n-1)}{8(n+1)(2n+1)}\, a_n.$$

Trouver le rayon de convergence de la série, et calculer a_n en fonction de n.

Réponse du cadeau :
Soit R le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n x^n$. Soit, pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. On peut dériver terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence, d'où

$$\forall x \in]-R, R[, \qquad \begin{cases} f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ f''(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \end{cases} .$$

$$
\begin{aligned}
f \text{ est une solution } &\iff \forall x \in \,]-R,R[,\ 16(x^2-x)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (16x-8)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \\
&\iff \forall x \in \,]-R,R[,\ \sum_{n=2}^{\infty} 16n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} 16n(n-1)a_n x^{n-1} \\
&\qquad\qquad + \sum_{n=2}^{\infty} 16n a_n x^n + 16x a_1 - \sum_{n=2}^{\infty} 8n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \\
&\iff \forall x \in \,]-R,R[,\ \sum_{n=2}^{\infty} 16n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 16n(n+1)a_{n+1} x^n \\
&\qquad\qquad + \sum_{n=2}^{\infty} 16n a_n x^n + 16x a_1 - \sum_{n=1}^{\infty} 8(n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \\
&\iff \forall x \in \,]-R,R[,\ \sum_{n=2}^{\infty} \Big(16n(n-1)a_n - 16n(n+1)a_{n+1} + 16na_n - 8(n+1)a_{n+1} - a_n\Big)x^n \\
&\qquad\qquad + 16a_1 x - 32a_2 x - 16a_2 x - a_1 x = 0 \\
\text{(par unicité du DSE)} &\iff \begin{cases} \forall n \geqslant 2, \quad \big(-16n(n+1) - 8(n+1)\big)a_{n+1} - \big(16n(n-1) + 16n - 1\big)a_n = 0 \\ 15a_1 - 48a_2 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \forall n \geqslant 2,\ a_{n+1} = a_n \times \dfrac{16n(n-1)+16n-1}{16n(n+1)+8(n+1)} \\ a_2 = \dfrac{15}{48}a_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \forall n \geqslant 2,\ a_{n+1} = a_n \times \dfrac{16n^2-16n+16n-1}{16n^2+16n+8n+8} \\ a_2 = \dfrac{15}{48}a_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \forall n \geqslant 2,\ a_{n+1} = a_n \times \dfrac{(4n-1)(4n+1)}{8(2n^2+3n+1)} \\ a_2 = \dfrac{15}{48}a_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \forall n \geqslant 2,\ a_{n+1} = a_n \times \dfrac{(4n-1)(4n+1)}{8(n+1)(2n+1)} \\ a_2 = \dfrac{15}{48}a_1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Soit $x \neq 0$. On a

$$
\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{a_{n+1}}{a_n}|x| = \frac{(4n-1)(4n+1)}{8(n+1)(2n+1)} \sim \frac{16n^2}{16n^2}|x| \xrightarrow[n\to\infty]{} |x|
$$

D'où, par le critère de d'Alembert, $R = 1$. On a $a_1 = \frac{1\times(-1)}{4\times 2}a_0$, $a_2 = \frac{5\times 3}{4\times 4\times 3}a_1$, et $a_3 = \frac{9\times 7}{4\times 6\times 5}a_2$. On devine la formule

$$
\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = -\frac{(4n-3)\times\cdots\times 9\times 7\times 5\times 3\times 1}{4^n \times 2n \times\cdots\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2}a_0.
$$

Montrons par récurrence la formule

$$
\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = -\frac{(4n-2)!}{4^n \times (2n)! \times 2^{2n-1} \times (2n-1)!}.
$$

Cadeaux du 31/01/23

Cadeau 1 :
Soit A la matrice

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Interpréter géométriquement l'endomorphisme f représenté par A dans la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Cadeau 2 (Exercice 6 du TD) :
Écrire la matrice, dans la base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$, de la rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ autour de l'axe dirigé et orienté $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

Réponse du cadeau 2 :

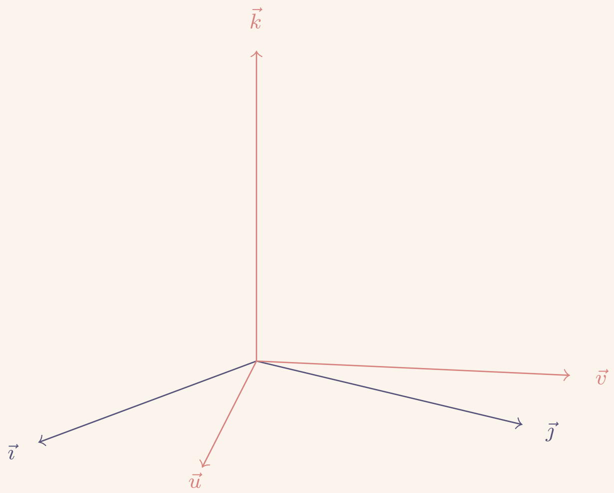

Figure 2 – Rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ autour de l'axe dirigé orienté $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

On cherche $\mathscr{B}' = (\vec{k}, \vec{u}, \vec{v})$ une base orthonormée directe. On pose $\vec{v} = (\vec{\imath} + \vec{\jmath})/\sqrt{2}$, et $\vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{k}$. On a

$$\vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{k} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit f la rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ autour de l'axe dirigé et orienté par $(\vec{\imath} + \vec{\jmath})/\sqrt{2}$. Ainsi,

$$[\,f\,] = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{k} \\ \vec{u} \\ \vec{v} \end{matrix} \\ \begin{matrix} f(\vec{k}) & \quad f(\vec{u}) & \quad f(\vec{v}) \end{matrix} \end{array} = A'.$$

Ainsi, par un changement de base $\mathscr{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ vers $\mathscr{B}' = (\vec{k}, \vec{u}, \vec{v})$. Ainsi, $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$ d'où $A = P \cdot A' \cdot P^{-1}$, et

$$P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \vec{k} & \quad \vec{u} & \quad \vec{v} \end{matrix} \end{array}.$$

De plus, $P^{-1} = P^\top$ car les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont orthonormées.

Réponse du cadeau 1 :
Les colonnes de cette matrice forment une base orthonormée : $\langle C_1 \mid C_2\rangle = \langle C_2 \mid C_3\rangle = \langle C_3 \mid C_1\rangle = 0$, et $\|C_1\|^2 = \|C_2\|^2 = \|C_3\|^2 = \sqrt{(4+6+6)/16} = 1$. Cette base est directe car $C_1 \wedge C_2 = C_3$ en calculant le produit vectoriel. (Ou, on peut aussi calculer $\det A$, et on trouve 1.) Ainsi, on a $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. C'est la matrice d'une rotation, d'où, dans une base adaptée, l'endomorphisme est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme la trace est un invariant de similitude, $\operatorname{tr} A = 0 = 2\cos\theta + 1$. Ainsi, $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, donc $\theta \equiv \pm\frac{2\pi}{3} \ \ [2\pi]$. On résout donc $AX = 1X$ avec X^3 :

$$\begin{aligned} A\cdot X = 1X &\iff \begin{cases} -2x - \sqrt{6}y + \sqrt{6}z = 4x \\ \sqrt{6}x + y + 3z = 4y \\ -\sqrt{6}x + 3y + z = 4z \end{cases} \\ &\ \ \vdots \\ &\iff X \in \operatorname{Vect}(\vec{\jmath} + \vec{k}) \end{aligned}$$

— Soit $\vec{w} = (\vec{\jmath} + \vec{k})/\sqrt{2}$. Cherchons le signe de θ, modulo 2π. Calculons $f(\vec{\imath}) = -\frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{6}}{4}\vec{\jmath} - \frac{\sqrt{6}}{4}\vec{k}$. Et, on calcule $\vec{\imath} \wedge f(\vec{\imath})$:

$$\vec{\imath} \wedge f(\vec{\imath}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{6}}{4}(\vec{\jmath} + \vec{k}),$$

qui a le même sens que $\vec{w}$, d'où $\theta = +\frac{2\pi}{3}$.

— Si $\vec{w} = -(\vec{\jmath} + \vec{k})/\sqrt{2}$. De la même manière, on a $\theta = -\frac{2\pi}{3}$.

Cadeau du 01/02/23

Cadeau :
Soit A la matrice

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 3 & 1 \\ -\sqrt{6} & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Interpréter géométriquement l'endomorphisme f représenté par A dans la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Réponse du cadeau :
On remarque que,

$$B = A \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{S}.$$

On pose s, a et b les endomorphismes représentés par S, A et B. Ainsi $b = a \circ s$. Et, s est la reflection par rapport au plan $\mathrm{Vect}(\vec{\imath}, \vec{\jmath} + \vec{k})$.

Autre méthode :
On diagonalise la matrice, et on conclut. Les valeurs propres sont *sympathiques*.

Cadeau du 02/02/23

Cadeau :
Soit E un espace euclidien, et soit $\vec{a} \in E$ un vecteur non-nul. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathscr{s} : E &\longrightarrow E \\ \vec{x} &\longmapsto \vec{x} - 2\frac{\langle \vec{a} \mid \vec{x}\rangle}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a} \end{aligned}$$

est une réflexion.

Réponse du cadeau :
Soit $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-1}, \vec{a})$, où $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de $H = [\operatorname{Vect}\vec{a}]^\perp$. Ainsi, dans cette base,

$$[\,\mathscr{s}\,]_{\mathscr{B}} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \vec{e}_1 \\ \vdots \\ \vec{e}_{n-1} \\ \vec{a} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \mathscr{s}(\vec{e}_1) & \ldots & \mathscr{s}(\vec{e}_{n-1}) & \mathscr{s}(\vec{a}) \end{array} \end{array}.$$

Donc, $\mathscr{s}$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan H, (*i.e.* c'est une réflexion).

Corrigé (partiel) de l'exercice 3 du TD 13 :

— $\|\vec{u}\| = 0 \implies \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n| = 0 \implies u = 0_E$;

— Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\|\alpha u\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\alpha u_n| = |\alpha| \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n| = |\alpha|\,\|\vec{u}\|$;

— Soient $u, v \in E$. $\|u + v\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n + v_n|$. Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n|$ par inégalité triangulaire. Et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ car le sup est un majorant. De même, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} |v_n|$ car le sup est un majorant. D'où, $|u_n + v_n| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |v_n|$ qui est un majorant. Or, $\sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n + v_n|$ est le plus petit majorant. On a donc $\sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n + v_n| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |v_n|$ donc $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

Cadeau du 03/02/23

Suite du cadeau du 02/02/2023

Cadeau :
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs distincts et de même norme. Montrer qu'il existe une unique réflexion $\mathscr{s}$ telle que $\mathscr{s}(\vec{u}) = \vec{v}$.

Réponse du cadeau :
On procède par Analyse-Synthèse.

Analyse On suppose que $\mathscr{s}$ est une réflexion par rapport à un hyperplan H, et que $\mathscr{s}(\vec{u}) = \vec{v}$. Alors, $\mathscr{s}(\vec{x}) - \vec{x} \perp H$, démontré plus tard. En particulier, $\mathscr{s}(\vec{u}) - \vec{u} = \vec{v} - \vec{u} \perp H$, d'où l'unicité de H.

Synthèse Soient $\vec{a} = \vec{v} - \vec{u}$ et $H \perp \vec{a}$. Alors $\mathscr{s} : \vec{x} \mapsto \vec{x} - 2 \langle \vec{a} \mid \vec{x} \rangle \, \vec{a} / \|\vec{a}\|^2$ est une réflexion. Il reste à montrer que $\mathscr{s}(\vec{u}) = \vec{v}$:

$$\mathscr{s}(\vec{u}) = \vec{u} - \frac{\langle \vec{v} - 2\vec{u} \mid \vec{u} \rangle}{\|\vec{v} - \vec{u}\|} (\vec{v} - \vec{u}).$$

On veut montrer que $\langle \vec{v} - \vec{u} \mid \vec{u} \rangle / \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = -\frac{1}{2}$. On calcule $\langle \vec{u} - \vec{v} \mid \vec{v} \rangle = \langle \vec{u} \mid \vec{u} \rangle - \langle \vec{v} \mid \vec{u} \rangle$. Par ailleurs, $\frac{1}{2} \|\vec{v} - \vec{u}\| = \frac{1}{2} \langle \vec{v} - \vec{u} \mid \vec{v} - \vec{u} \rangle = \frac{1}{2} (\|\vec{v}\|^2 - 2 \langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle + \|\vec{u}\|^2) = \|\vec{u}\|^2 - \langle \vec{u} \mid \vec{v} \rangle$. Or, par hypothèse $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

Montrons que $\mathscr{s}(\vec{x}) - \vec{x} \perp H$. On sait que $H \oplus H^\perp = E$. Pour tout vecteur $\vec{x}$, il existe un unique couple de vecteurs $(a, b) \in H \times H^\perp$ tel que $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$. Ainsi, $\mathscr{s}(\vec{x}) = \mathscr{s}(\vec{a}) + \mathscr{s}(\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$. Et, donc $\mathscr{s}(\vec{x}) - \vec{x} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{a} - \vec{b} = -2\vec{b} \in H^\perp$.

Cadeau du 03/03/23

Cadeau de Corentin en khôlle avec JJ. Mallet

Cadeau :

On considère sur $E = \mathbb{R}[X]$ les normes N_1 et N_2 ainsi que l'application φ définie par

$$\forall P \in E, \quad N_1(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)| \qquad N_2 = \sup_{t \in [1,2]} |P(t)| \qquad \varphi(P) = P(0).$$

1. *Montrer que φ définit une application de (E, N_1) vers $\mathbb{R}$, mais discontinue de (E, N_2) vers $\mathbb{R}$. (On pourra utiliser la suite définie par $P_n(t) = (1 - t/2)^n$.)*
2. *Monter que* $\operatorname{Ker} \varphi$ *est fermé dans (E, N_1). L'est-il dans (E, N_2) ?*

Réponse du cadeau :

1. L'application φ est linéaire. Montrons qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout polynôme P, $|\varphi(P)| \leqslant M\, N_1(P)$. On a $|\varphi(P)| = |P(0)| \leqslant \sup_{t \in [0,1]} |P(t)| = N_1(P)$, car c'est un majorant. D'où, $|\varphi(P)| \leqslant N_1(P)$ pour tout polynôme P.

   On pose la suite de polynômes définie comme $P_n(t) = (1 - t/2)^n$. On a $N_2(P_n) = \sup_{t \in [1,2]} |(1 - t/2)^n| = (1/2)^n$ car la fonction $t \mapsto (1 - t/2)^n$ est décroissante et positive. Et, $|\varphi(P_n)| = 1$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout polynôme P, $|\varphi(P)| \leqslant K \cdot N_2(P)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant K \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Les inégalités larges passent à la limite, d'où $1 \leqslant 0$, ce qui est absurde.
2. L'ensemble $\{0\}$ est un fermé, φ est continue sur (E, N_1), et, par définition de Ker, $\varphi^{-1}(\{0\}) = \operatorname{Ker} \varphi$. Ainsi, $\operatorname{Ker} \varphi$ est un fermé (l'image réciproque d'un fermé est un fermé).

   On a $\varphi(P_n) = 1$, donc $P_n \in E \setminus \operatorname{Ker} \varphi$. Or, $N_2(P_n) = \frac{1}{2^n} \to 0$, quand $n \to \infty$. Et, $0 \in \operatorname{Ker} \varphi$ car φ est linéaire. Ainsi, $E \setminus \operatorname{Ker} \varphi$ n'est pas un fermé. On en déduit que $\operatorname{Ker} \varphi$ n'est pas un ouvert pour N_2.

   Posons $Q_n = P_n - 1$ et alors $\varphi(Q_n) = 0$. On a $N_2(Q_n + 1) = N_2(P_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ quand $n \to \infty$. Donc, $Q_n \to -1$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n \in \operatorname{Ker} \varphi$ mais $\lim_{n \to \infty} Q_n \notin \operatorname{Ker} \varphi$. Par caractérisation séquentielle d'un fermé, on en déduit que $\operatorname{Ker} \varphi$ n'est pas un fermé.

Cadeau du 27/03/23

Cadeau :
On considère la matrice A définie comme

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Déterminer le polynôme minimal μ_A de la matrice A.*
2. *En déduire, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de I_3, A et A^2.*
3. *Calculer $\exp A$.*

Réponse du cadeau :

1. On calcule le polynôme caractéristique χ_A, et on trouve $\chi_A = (X-1)\cdot(X-2)^2$. (Vérification : pour un polynôme scindé, $\operatorname{tr} A = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} m_\lambda \cdot \lambda$, et $\det A = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} \lambda^{m_\lambda}$.) Le polynôme minimal, μ_A, divise tous les polynômes annulateurs de A. En particulier, il divise χ_A, d'après le théorème de Cayley & Hamilton. En plus, le spectre de A est l'ensemble des racines de χ_A, mais c'est aussi l'ensemble des racines de μ_A. On peut donc calculer $(A - I_3)\cdot(A - 2I_3)$, qui n'est pas nul. D'où, $\chi_A = \mu_A$.

   Autre méthode : on trouve $\dim \mathrm{SEP}(2) = 1$, d'où A n'est pas diagonalisable, elle ne possède donc pas de polynôme annulateur scindé à racines simples. Ainsi, μ_A n'est pas scindé à racines simples. On en déduit donc que $\mu_A = \chi_A$.

   Autre autre méthode : la famille (I_3, A, A^2) est libre, il n'existe donc pas de polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à 2.
2. On réalise la division euclidienne $X^n \div \mu_A(X)$, pour obtenir un quotient $Q_n(X)$ et un reste $R_n(X)$. Ainsi, $X^n = \mu_A(X)\cdot Q_n(X) + R_n(X)$, et $\deg R_n < \deg \mu_A$. Et donc, $A^n = R_n(A)$. Or, $R_n(X) = a_n X^2 + b_n X + c_n$. Il y a 3 inconnues, on cherche 3 équations. On a $1^n = 0 \times Q_n(1) + R_n(1) = a_n + b_n + c_n$. De plus, $2^n = 0 \times Q_n(2) + R_n(2) = 4a_n + 2b_n + c_n$. Finalement, en dérivant, on trouve $nX^{n-1} + \mu_A' \cdot Q_n + \mu_A \cdot Q_n' + R_n'$, et donc, pour $X = 2$, on trouve $n2^{n-1} = 0 \cdot Q_n(2) + 0 \cdot Q_n'(2) + R_n'(2) = 4a_n + b_n$. On résout donc le système

   $$\begin{cases} a_n + b_n + c_n = 1 \\ 4a_n + 2b_n + c_n = 2^n \\ 4a_n + b_n = n2^{n-1} \end{cases}.$$

   On trouve donc que $a_n = n2^{n-1} - 2^n + 1$, $b_n = -3n \cdot 2^{n-1} + 2^{n+2} - 4$ et $c_n = n2^n - 3 \cdot 2^n + 4$. On en déduit que $A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n I_3$. Vérification : pour $n = 0$, on a $(a_n, b_n, c_n) = (0, 0, 1)$; pour $n = 1$, on a $(a_n, b_n, c_n) = (0, 1, 0)$; pour $n = 2$, on a $(a_n, b_n, c_n) = (1, 0, 0)$.
3. Enfin, on calcule

   $$\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n A^2 + b_n A + c_n I_3}{n!} = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3.$$

   On calcule γ, et on procèdera de même pour les autres coefficients.

   $$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n - 3 \cdot 2^n + 4}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n_2^n}{n!} - 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \\ &= 2\,\mathrm{e}^2 - 3\,\mathrm{e}^2 + 4\mathrm{e} \end{aligned}$$

   En effet, $x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}/n! = x \mathrm{d}\,\mathrm{e}^x/\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x$, car on peut dériver terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence.

Cadeau du 28/03/23

Comment utiliser la trigonalisation pour calculer l'exponentielle d'une matrice ?

Cadeau :
La matrice B est-elle diagonalisable et calculer $\exp B$, où B est la matrice 2×2 définie comme

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Réponse du cadeau :

1. Non. En effet, son unique valeur propre sont 1, et, si B serait diagonalisable, alors B serait semblable à I_2, ce qui est absurde car $B \neq I_2$.
2. On remarque que $B^2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. On peut montrer par récurrence que

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour calculer $\exp B$, on procède pour chaque coefficient de la matrice. En effet,

$$\mathrm{e}^B = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} 1/n! & \sum_{n=0}^{\infty} 2n/n! \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} 1/n! \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e} & 2\mathrm{e} \\ 0 & \mathrm{e} \end{pmatrix}$$

car

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n}{n!} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = 2\mathrm{e}.$$

Autre réponse du cadeau :
On remarque que $B = I_2 + \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = I_2 + A$. Et, comme I_2 et A commutent, alors

$$\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{I_2} \cdot \mathrm{e}^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_n^n}{n!} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_n}{n!} \cdot (I_n + A) = \mathrm{e} \cdot B$$

car la matrice A est nilpotente : A^2 est la matrice nulle.

Cadeau du 29/03/23

Cadeau :
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

1. *Montrer que A est antisymétrique si, et seulement si, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top \cdot A \cdot X = 0$.*
2. *Que peut-on dire de e^A si A est antisymétrique ?*

Réponse du cadeau :

1. Le sens direct a déjà été démontré. Montrons la réciproque. On suppose $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top AX = 0$. Soient X et Y deux vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}
0 &= (X+Y)^\top A(X+Y) \\
&= X^\top AX + Y^\top AY + X^\top AY + Y^\top AX \\
&= X^\top AY + Y^\top AY \\
&= X^\top AY + X^\top A^\top Y \text{ car } X^\top A^\top Y \in \mathbb{R} \\
&= X^\top (A + A^\top) Y
\end{aligned}$$

   Ainsi, en notant $M = A + A^\top$, $\langle X \mid MY \rangle = X^\top \cdot (MY) = 0$, pour tout X. D'où, $MY = 0$, et ce, quel que soit Y. D'où, $M = 0$. La matrice A est donc antisymétrique : $A = -A^\top$.

2. On sait que $(\exp A)^\top = \exp(A^T) = \exp(-A) = (\exp A)^{-1}$, d'où $\mathrm{e}^A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. De plus, $\det(\exp A) = \exp(\operatorname{tr} A) = 1$ et donc $\mathrm{e}^A \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Autre réponse du cadeau :

1. On suppose que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top AX = 0 \in \mathbb{R}$. Donc $X^\top A^\top X = 0$, par application de la transposée. D'où, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top (A + A^\top) X = 0$ et donc $A + A^\top \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $P^\top (A + A^\top) P = D$, où D est diagonale. Ainsi, pour tout vecteur X, $X^\top PDP^\top = (P^\top X)^\top D (P^\top X) = 0$. D'où, par changement de base, pour tout vecteur U, $U^\top DU = 0$. Ainsi, $D = 0$ et donc $A + A^\top = 0$. On en déduit que $A^\top = -A$, la matrice A est antisymétrique.

Cadeau du 30/03/23

polynômes interpolateurs de Lagrange.

Cadeau :
Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout entier non nul $n \in \mathbb{N}^\star$, notons P_n l'unique polynôme de $\mathbb{R}_p[X]$ vérifiant, pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, $P_n(i) = (-1)^n/(n+i)$. Montrer que la série de "vecteurs" $\sum_{n \geqslant 1} P_n$ est convergente.

Réponse du cadeau :
Posons, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $L_i(X)$ le i-ème polynôme interpolateur de Lagrange :

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{p} \frac{X - j}{i - j}.$$

Ainsi, pour tout entier n, $P_n(X) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^n L_i(X)/(n+i)$. Or, les polynômes interpolateurs de Lagrange forment une base de $\mathbb{R}_p[X]$. Ainsi, $\mathscr{B} = (L_0, \ldots, L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$. Or, $\mathbb{R}_p[X]$ est de dimension finie. Et, dans un espace vectoriel normé de dimension finie, une série de vecteurs converge si, et seulement si, les sommes partielles de chaque coefficients convergent. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, la série $\sum (-1)^k/(k+1)$ converge. On en déduit que la série de polynômes $\sum P_n$ converge.

Cadeau du 31/03/23

(Khôlle 21 ‽)

Cadeau A :

Soit, pour tout réel $x \in]0,+\infty[$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, $f_n(x) = 1/(n+n^2x)$.

1. *Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.*
2. *Soit, pour $x \in]0,+\infty[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Montrer que f est continue sur $]0,+\infty[$.*

2,5. *Montrer que la convergence de la série $\sum f_n$ n'est pas normale.*

3. *La convergence de la série de fonctions $\sum f_n$ est-elle uniforme sur $]0,+\infty[$?*
4. *Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.*

Cadeau B :

Soient α et β deux scalaires d'un espace vectoriel $\mathbb{K}$ de dimension finie. Soient f, u et v trois endomorphismes de $\mathbb{K}$ tels que

$$\begin{cases} f = \alpha u + \beta v, \\ f^2 = \alpha^2 u + \beta^2 v, \\ f^3 = \alpha^3 u + \beta^3 v. \end{cases}$$

1. *Déterminer un polynôme annulateur de f.*
2. *Montrer que f est diagonalisable.*

Cadeau C :

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{1 - z^{2n-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{1 - z^{2k}}.$$

Réponse du cadeau A :

1. Soit $x \in]0,+\infty[$: $1/(n+n^2x) \sim 1/n^2x$, qui ne change pas de signe. Or, la série numérique $\sum 1/n^2x = (1/x)\sum 1/n^2$ converge par le critère de Riemann. D'où, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.
2. Soit $a > 0$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, pour tout réel $x \in [a,+\infty[$,

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n+n^2x} \leqslant \frac{1}{n^2a},$$

et $\sum 1/n^2a$ converge par critère de Riemann. Ainsi, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$, donc uniformément sur $[a,+\infty[$. Chaque fonction f_n est continue sur $[a,+\infty[$, la fonction f est donc continue sur $[a,+\infty[$. Ceci étant vrai pour tout a, et la continuité étant une propriété *locale*, on en déduit que la fonction f est continue sur $]0,+\infty[$.

2,5. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{x\in]0,+\infty[} |f_n(x)| = 1/n$. Or, la série numérique $\sum 1/n$ diverge, donc la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $]0,+\infty[$.

3. Supposons, par l'absurde, que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $f_n(x) \to 1/n$ quand $x \to 0$. D'après le théorème de la double limite, on en déduit que la série $\sum 1/n$ converge, ce qui est absurde. D'où, $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, et $x > 1$. On encadre $f_n(x)$:
$$\frac{1}{n^2(x+1)} \leqslant f_n(x) = \frac{1}{n+n^2x} \leqslant \frac{1}{n^2x}.$$
D'où, par somme, pour tout entier $N \in \mathbb{N}^\star$,
$$\frac{1}{(x+1)}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} \leqslant \sum_{n=1}^{N} f_n(x) \leqslant \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}.$$
Or, les inégalités larges passent à la limite, d'où
$$\frac{\pi^2}{6(x+1)} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x) \leqslant \frac{\pi^2}{6x}.$$
D'où, en divisant par $x+1$,
$$\frac{x}{x+1} \leqslant \frac{6x}{\pi^2}f(x) \leqslant 1.$$
D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\frac{6x}{\pi^2}f(x) \to 1$ quand $x \to \infty$ car $x/(x+1) \to 1$. D'où, $f(x) \sim_{x\to\infty} \pi^2/6x$.

Réponse du cadeau B :

1. On calcule
$$(\alpha+\beta)f^2 = \alpha^3u + \beta^3v + \alpha^2\beta u + \alpha\beta^2 v = f^3 + \alpha\beta f.$$
On en déduit que le polynôme $\mu(X) = X^3 - (\alpha+\beta)X^2 + \alpha\beta X$ annule f.
2. On procède par disjonction de cas.
   (a) Si $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ et $\alpha \neq \beta$, alors μ est un polynôme scindé à racines simples annulateur de f. L'endomorphisme f est donc diagonalisable.
   (b) Si $\alpha = 0$ et $\beta = 0$, alors $f = 0$ qui est diagonal.
   (c) Si $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$, alors $f = \beta v$ et $f^2 = \beta^2 v$. Ainsi, $f^2 - \beta f = 0$ et donc $X^2 - \beta X = X(X-\beta)$ est un polynôme scindé à racines simple annulateur de f. D'où, f est diagonalisable.
   (d) Si $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$, on procède comme le cas (c).
   (e) Si $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, et $\alpha = \beta$, alors $f = \alpha(u+v)$ et $f^2 = \alpha^2(u+v)$. D'où, $f^2 = \alpha f$. Ainsi, $X^2 - \alpha X = X(X-\alpha)$ est un polynôme annulateur de f, il est scindé à racines simples et donc f est diagonalisable.

Réponse (partielle) **du cadeau C** :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n-1}}{1-z^{2n-1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} z^{2n-1}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}(z^{2n-1})^k\Big) && \text{car } |z^{2n-1}| = |z|^{2n-1} < 1\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} z^{2n-1}\cdot(z^{2n-1})^k\Big)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} z^{2n-1}(z^{2n-1})^k\Big) && \text{car } (\heartsuit)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(z^{2n-1})^{k+1}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(z^{k+1})^{2n-1}\\
&= \dots
\end{aligned}$$

($\heartsuit$) : la série converge absolument, c'est donc une famille sommable et on applique le théorème de Fubini.

Cadeau du 01/30423

(Cadeau ultime)

Cadeau :

On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ défini comme $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1\}$.

1. Déterminer trois plans de symétries de la surface $\mathcal{S}$. Déterminer une rotation par laquelle $\mathcal{S}$ est stable.
2. Montrer que, pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{S}$, $x + y + z \leqslant 1$. En déduire que la surface $\mathcal{S}$ est incluse dans un tétraèdre.

Réponse au cadeau :

Rotation de $2\pi/3$ autour de l'axe orienté par $\vec{u} = (1, 1, 1)$, d'où les plans de symétries. Comme $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ et $0 \leqslant z \leqslant 1$ donc $x \leqslant \sqrt{x}$, $y \leqslant \sqrt{y}$ et $z \leqslant \sqrt{z}$. D'où, par somme, $x + y + z \leqslant 1$. Ainsi, pour tout vecteur $(x, y, z) \in \mathcal{S}$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ et $x + y + z \leqslant 1$. On en déduit que $\mathcal{S}$ est incluse dans un tétraèdre.