Annexe C

Série exc matrice

Hugo Salou MPI*

Dernière mise à jour le 24 mars 2023

Nous avons vu au chapitre 12 que toute application linéaire ou multilinéaire sur un espace vectoriel normé de dimension finie est continue et que, par conséquent, sont des applications continues :

— la transposée $\square^\top : \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \ni A \mapsto A^\top$,

— un changement de base $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \ni A \mapsto P^{-1} \cdot A \cdot P$,

— la multiplication matricielle : $\left(\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})\right)^2 \ni (A, B) \mapsto A \cdot B$.

Par suite, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de matrices carrées telles que $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A$ et $B_n \xrightarrow[n\to\infty]{} B$ alors

(1) $A_n^\top \xrightarrow[n\to\infty]{} A^\top$,

(2) $P^{-1} \cdot A_n \cdot P \xrightarrow[n\to\infty]{} P^{-1} \cdot A \cdot P$,

(3) $A_n \cdot B_n \xrightarrow[n\to\infty]{} A \cdot B$.

On s'intéresse maintenant, non plus à des suites, mais à des séries de vecteurs.

> Définition 1 :
> Soit $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs d'un espace vectoriel normé E. On dit que la série de vecteurs $\sum \vec{u}_n$:
>
> — *converge* si la suite de vecteurs $(\vec{S}_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} \vec{u}_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ;
>
> — *converge absolument* si la série de réels $\sum \|\vec{u}_n\|$ converge.

> Proposition 2 :
> Dans un espace vectoriel normé de dimension <u>finie</u>, si une série de vecteurs converge absolument, elle converge (simplement).

Démonstration :
On suppose l'espace vectoriel E de dimension d. Toutes les normes étant équivalentes en dimensions finie, on choisit une norme adaptée : $\|\vec{u}_n\|_\infty = \max(|u_{n,1}|, \dots, |u_{n,d}|)$ où les $u_{n,i}$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}_n$ dans une base de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $0 \leqslant |u_{n,i}| \leqslant \|\vec{u}_n\|_\infty$. Or, par hypothèse, la série $\sum \|\vec{u}_n\|_\infty$ converge. D'où, pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, la série $\sum |u_{n,i}|$ converge. D'où, la série $\sum u_{n,i}$ converge. Et, en dimension finie, la convergence implique une convergence coordonnées par coordonnées. On en déduit que la série $\sum \vec{u}_n$ converge.

Remarque :
On munit l'espace vectoriel normé $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ d'une norme <u>sous-multiplicative</u>. Soient $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée et $\sum a_n z^n$ une série entière (réelle ou complexe) de rayon de convergence R : si $\|A\| < R$, alors la série de matrices $\sum a_k A^k$ converge.

En effet, la norme étant sous-multiplicative, on a $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$ pour $k \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^\star$, on a $\|a_k A^k\| = |a_k| \cdot \|A^k\| \leqslant |a_k| \cdot \|A\|^k$. Or, $\|A\| < R$ et la série $\sum a_k \cdot \|A\|^k$ converge absolument. On en déduit que la série $\sum a_k A^k$ converge absolument, donc converge (simplement).

Exemple 3 (Séries géométriques) :
On munit l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ d'une norme <u>sous-multiplicative</u>. Si $\|A\| < 1$, alors $I_n - A$ est inversible et

$$(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

De même si la matrice A est nilpotente. [1]

En effet, la série entière $\sum z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$. Soit $N \in \mathbb{N}$. On calcule

$$(I_n - A) \cdot \sum_{k=0}^{N} A^k = \sum_{k=0}^{N} A^k - \sum_{k=1}^{N+1} A^k = A^0 - A^{N+1} = I_n - A^{N+1}.$$

On a $0 \leqslant \|A^{N+1}\| \leqslant \|A\|^{n+1}$ qui tend vers 0 quand $N \to \infty$ car $\|A\| < 1$. D'où, d'après le théorème des gendarmes, on a A^{N+1} converge vers la matrice nulle quand $N \to \infty$. Et,

1. À savoir, l'hypothèse $\|A\| < 1$ n'est plus obligatoire.

comme $\|A\| < 1$, la suite $\left(\sum_{k=0}^{N} A^k\right)$ converge. Ainsi, par continuité de l'application linéaire $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \ni M \mapsto (I_n - A) \cdot M$ sur l'espace $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ de dimension finie. *Autre rédaction* : par continuité du produit matriciel. Par unicité de la limite, on a $(I_n - A) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A^k = I_n$. On en déduit que

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I_n - A)^{-1}.$$

Si A est nilpotent d'ordre ν, alors

$$(I_n - A) \cdot \sum_{k=0}^{\nu-1} A^k = \sum_{k=0}^{\nu-1} A^k - \sum_{k=1}^{\nu} A^k = I_n - A^{\nu} = A.$$

Définition 4 :
On appelle *exponentielle d'une matrice* $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ quelconque, que l'on note $\exp A$ ou e^A, la matrice

$$\exp A = \mathrm{e}^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Cette définition reste vraie peu importe la norme choisie, comme le rayon de convergence de la série entière $\sum z^n/k!$ a un rayon de convergence infini.

Exemple 5 :
1. L'exponentielle de la matrice nulle (0) est I_n car $\sum_{k=0}^{\infty} (0)^k/k! = I_n + (0) + \cdots = I_n$.
2. L'exponentielle d'une matrice diagonale $\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est $\exp \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \operatorname{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \dots, \mathrm{e}^{\lambda_n})$. En effet,

$$\exp \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1!} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} + \cdots = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{e}^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

3. D'une part, on a

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} = I_n + \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} -\theta^2 & 0 \\ 0 & -\theta^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} 0 & \theta^3 \\ -\theta^3 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4!} \begin{pmatrix} \theta^4 & 0 \\ 0 & \theta^4 \end{pmatrix} + \cdots$$

Or, $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p)!} \cdot A^{2p} = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ et $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p)!} \cdot A^{2p} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -\sin\theta \\ \sin\theta & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Enfin, on en conclut que

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Proposition 6 :
Soient $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

1. Si $AB = BA$, alors $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \cdot \mathrm{e}^B$.
2. La matrice e^A est inversible et $(\mathrm{e}^A)^{-1} = \mathrm{e}^{-A}$.
3. La transposée de l'exponentielle est l'exponentielle de la transposée : $(\exp A)^\top = \exp(A^\top)$.
4. L'exponentielle d'une matrice est invariante par changement de base : $\exp(P^{-1} \cdot A \cdot P) = P^{-1} \cdot \exp A \cdot P$.
5. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$ est dérivable et $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{tA} = A \cdot \mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tA} \cdot A$.

Démonstration :
1. La démonstration de ce point est dans le poly.
2. Les matrices A et $-A$ commutent, d'où $\mathrm{e}^{A+(-A)} = \mathrm{e}^A \cdot \mathrm{e}^{-A}$. On a donc $I_n = \mathrm{e}^A \cdot \mathrm{e}^{-A}$.
3. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\exp(A^\top) \xleftarrow[N \to \infty]{(\star\star)} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} (A^\top)^n = \Big(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} (A^n) \Big)^\top \xrightarrow[N \to \infty]{(\star)} (\exp A)^\top.$$

par continuité de la transposée (pour $(\star)$) et par définition (pour $(\star\star)$).

4. On procède comme le point précédent, par continuité du changement de base.
5. On pose $f : t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$, et on calcule

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \frac{\mathrm{e}^{(t+h)A} - \mathrm{e}^{tA}}{h} = \frac{\mathrm{e}^{hA}\cdot\mathrm{e}^{tA} - \mathrm{e}^{tA}}{h} = \frac{(\mathrm{e}^{hA} - I_n)\cdot\mathrm{e}^{tA}}{h}.$$

De plus, $(\exp(hA) - I_n)/h \to A$ quand $h \to 0$ car

$$\exp(hA) = I_n + hA + (hA)^2 \underbrace{\left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}(hA)^{k-2}\right)}_{\varepsilon(h)}$$

d'où $(\exp(hA) - I_n)/h = (hA + h^2\varepsilon(h))/h = A + h\varepsilon(h) \to A$. De plus, le produit matriciel est continu. Donc f est dérivable et $f'(t) = A \cdot \mathrm{e}^{tA}$. De plus, $A \cdot \mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tA} \cdot A$.

Exemple (Cadeaux) : *(a) En supposant connaître les éléments de* $\operatorname{Sp} A$*, quelles sont les valeurs propres de* $\operatorname{Sp} \mathrm{e}^A$ *?* ($\triangleright$ $\operatorname{Sp}\mathrm{e}^A = \exp(\operatorname{Sp} A)$)

(b) Que vaut $\det \mathrm{e}^A$ *?* ($\triangleright$ $\det \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} A}$)

(c) Interpréter géométriquement l'égalité $\exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

(a) Rappel : une matrice est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique χ_A est scindé. En particulier, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, A est trigonalisable. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}\cdot A \cdot P = T$ soit triangulaire. Ainsi,

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^T &= I_n + T + \frac{T^2}{2!} + \frac{T^3}{3!} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & \star \\ & \lambda_2^2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} + \cdots \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & & \star \\ & \mathrm{e}^{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \mathrm{e}^{\lambda_n} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où, $\operatorname{Sp}\mathrm{e}^T = \{\mathrm{e}^{\lambda_1}, \dots, \mathrm{e}^{\lambda_n}\}$. Or, $\mathrm{e}^T = \mathrm{e}^{P^{-1}\cdot A\cdot P} = P^{-1}\cdot\mathrm{e}^A\cdot P$. D'où, e^T et e^A sont semblables. On en déduit que $\operatorname{Sp}\mathrm{e}^A = \operatorname{Sp}\mathrm{e}^T = \exp(\operatorname{Sp} A)$, car le spectre est un invariant de similitude.

(b) De même, $\det \mathrm{e}^T = \det \mathrm{e}^A$ car le déterminant et la trace sont des invariants de similitude. Or,

$$\det \mathrm{e}^T = \mathrm{e}^{\lambda_1} \times \mathrm{e}^{\lambda_2} \times \cdots \times \mathrm{e}^{\lambda_n} = \mathrm{e}^{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} T}.$$

On en déduit que $\det \mathrm{e}^A = \det \mathrm{e}^T = \exp(\operatorname{tr} T) = \exp(\operatorname{tr} A)$.

(c) On relie cette question avec l'exercice 6 du TD 16 :

$$\begin{aligned}(E) \iff & \underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{X'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} \\ \iff & X'(t) = A \cdot X(t) \\ \iff & \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}}_{\exp \begin{pmatrix} 0 & -\omega t \\ \omega t & 0 \end{pmatrix} = \exp(tA)} \cdot X(0)\end{aligned}$$

Et alors ? On utilise la proposition 6 : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{e}^{tA} \cdot X(0) = A \cdot \mathrm{e}^{tA} X(0)$. En posant $X(t) = \mathrm{e}^{tA} \cdot X(0)$, on obtient $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X(t) = A \cdot X(t)$, ce qui est l'équation (E). On peut résoudre des équations différentielles avec l'exponentielle de matrices.