TD n° B 3

Invariants plus complexes

Hugo SALOU MPI*

Dernière mise à jour le 27 mars 2023

```ocaml
let swap (t: int array) (i: int) (j: int): unit =
  let tmp = t.(i) in
  t.(i) <- t.(j);
  t.(j) <- tmp

let range (t: int array) (idx: int): unit =
  (* idx : endroit mal range, t[0, idx - 1] : trie *)
  let curseur = ref idx in
  while (!curseur > 0 && t.(!curseur - 1) > t.(!curseur)) do
    swap t (!curseur) (!curseur - 1);
    curseur := !curseur - 1
  done

let tri_insertion (t: int array): unit =
  let n = Array.length t in
  for i = 0 to n - 1 do
    range t i
  done
```

Code 1 – Tri par insertion

Propriété : Spot t un tableau d'entiers de taille n. La fonction `tri_insertion` appelée sur t termine et produit un tableau t' tel que

- t' est trié,
- t' est une permutation de t.

Propriété : Soit t un tableau d'entiers de taille n. Soit $\mathrm{idx} \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Si le sous-tableau $t[0, \mathrm{idx}-1]$ est trié par ordre croissant, alors `range` t idx termine et produit un tableau t' tel que

- t' est trié par ordre croissant,
- t' est une permutation de t.

Preuve :
Soit t_0 un tableau de taille n. Soit $\mathrm{idx} \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $t_0[0, \mathrm{idx}-1]$ est trié. On considère $(\mathscr{I})$ le système suivant :

$$(\mathscr{I}) : \begin{cases} \texttt{curseur} \geqslant 0 & (\mathscr{P}_1) \\ t[\texttt{curseur}, \mathrm{idx}] \text{ est trié} & (\mathscr{P}_2) \\ t[0, \texttt{curseur} - 1] \text{ est trié} & (\mathscr{P}_3) \\ t \text{ est une permutation de } t_0 & (\mathscr{P}_4) \end{cases}.$$

Montrons que $(\mathscr{I})$ est un invariant.

- **Initialisation.** Au début, $t = t_0$ et $\texttt{curseur} = \mathrm{idx}$. Les propriétés de $\mathscr{I}$ sont vérifiées.
- **Hérédité.** Soit $\underline{t}$, $\underline{\texttt{curseur}}$, et $\bar{t}$, $\overline{\texttt{curseur}}$ les valeurs de t et curseur avant (resp. après) une itération de boucle. Par hypothèse de récurrence, $\underline{\texttt{curseur}} \geqslant 0$, le sous-tableau $\underline{t}[\underline{\texttt{curseur}}, \mathrm{idx}]$ est trié, $\underline{t}[0, \underline{\texttt{curseur}} - 1]$, $\underline{t}$ est une permutation de t_0. De plus, par condition de boucle, $\underline{\texttt{curseur}} > 0$ et $\underline{t}[\underline{\texttt{curseur}} - 1] > \underline{t}[\underline{\texttt{curseur}}]$. D'après le code, on a également $\overline{\texttt{curseur}} = \underline{\texttt{curseur}} - 1$, et pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, où $i \notin \{\underline{\texttt{curseur}}, \underline{\texttt{curseur}} - 1\}$, $\bar{t}[i] = \underline{t}[i]$. Et, $\bar{t}[\underline{\texttt{curseur}}] = \underline{t}[\underline{\texttt{curseur}} - 1]$, et $\bar{t}[\underline{\texttt{curseur}} - 1] = \bar{t}[\underline{\texttt{curseur}}]$. On en déduit trivialement que $\bar{t}$ est une permutation de $\underline{t}$, qui est une permutation de t_0, d'où $(\mathscr{P}_4)$. De plus, $\overline{\texttt{curseur}} \geqslant 0$, d'où $(\mathscr{P}_1)$. Montrons $(\mathscr{P}_2)$, *i.e.* $\forall i \in \llbracket \overline{\texttt{curseur}}, \mathrm{idx}-1 \rrbracket$, $\bar{t}[i] \leqslant \bar{t}[i+1]$. Soit donc $i \in \llbracket \overline{\texttt{curseur}}, \mathrm{idx}-1 \rrbracket$.
  - Si $i = \overline{\texttt{curseur}}$, alors $\bar{t}[i] = \bar{t}[\overline{\texttt{curseur}}] = \bar{t}[\underline{\texttt{curseur}} - 1] = \underline{t}[\underline{\texttt{curseur}}] < \underline{t}[\underline{\texttt{curseur}} - 1] < \bar{t}[\underline{\texttt{curseur}}] < \bar{t}[\overline{\texttt{curseur}} + 1] < \bar{t}[i+1]$.
  - Si $i \in \llbracket \overline{\texttt{curseur}} + 1, \mathrm{idx} - 1 \rrbracket$, alors $\bar{t}[i] = \underline{t}[i] \leqslant \underline{t}[i+1] \leqslant \bar{t}[i+1]$.

  On en déduit $(\mathscr{P}_2)$. Montrons $(\mathscr{P}_3)$. Soit $i \in \llbracket 0, \overline{\texttt{curseur}} - 2 \rrbracket$. Alors, $\bar{t}[i] = \underline{t}[i] \leqslant \underline{t}[i+1] \leqslant \bar{t}[i+1]$, d'où $(\mathscr{P}_3)$.

On enrichit l'invariant en ajoutant la propriété $(\mathscr{P}_5)$: $\forall i \in \llbracket 0, \texttt{curseur} - 1 \rrbracket$, $\forall j \in \llbracket \texttt{curseur} + 1, \mathrm{idx} \rrbracket$, $\underline{t}[i] \leqslant \underline{t}[j]$. $\square$