TD n° 9

Algorithmique des graphes

Hugo SALOU MPI*

Dernière mise à jour le 4 janvier 2023

1 Arbres et forêts

2 Tri topologique

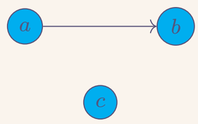

Figure 1 – Exemple de graphe

1. Dans le graphe ci-dessus, $a \to c \to b$ est un tri topologique mais pas un parcours.
2. Dans le même graphe, $b \to a \to c$ est un parcours mais pas un tri topologique.
3. Supposons que L_1 possède un prédécesseur, on le note L_i où $i > 1$. Ainsi, $(L_i, L_1) \in A$ et donc $i < 1$, ce qui est absurde. De même pour le dernier.
4. Il existe un tri topologique si, et seulement si le graphe est acyclique.

   "$\Longrightarrow$" Soit $L_1, \ldots, L_n$ un tri topologique. Montrons que le graphe est acyclique. Par l'absurde, on suppose le graphe non acyclique : il existe $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$ tels que $T_i \to \cdots \to T_j$ et $T_j \to \cdots \to T_i$ soient deux chemins valides. Ainsi, comme le tri est topologique et par récurrence, $i \leqslant j$ et $j \leqslant i$ et donc $i = j$, ce qui est absurde car i et j sont supposés différents. Le graphe est donc acyclique.

   "$\Longleftarrow$" Soit G un graphe tel que tous les sommets possèdent une arrête entrante. On suppose par l'absurde ce graphe acyclique. Soit x_0 un sommet du graphe. On construit par récurrence $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$ les successeurs successifs. Il y a un nombre fini de sommets donc deux sommets sont identiques. Donc, il y a nécessairement un cycle, ce qui est absurde.

Algorithme 1 Génération d'un tri topologique d'un graphe acyclique

Entrée $G = (S, A)$ un graphe acyclique
Sortie Res un tri topologique.

$\mathrm{Res} \leftarrow [\ \ ]$
tant que $G \neq \varnothing$ **faire**
    Soit x un sommet de G sans prédécesseur
    $G \leftarrow \big(S \setminus \{x\}, A \cap (S \setminus \{x\})^2\big)$
    $\mathrm{Res} \leftarrow \mathrm{Res} \cdot [x]$
retourner Res

5.

Algorithme 2 Génération d'un tri topologique d'un graphe

Entrée $G = (S, A)$ un graphe
Sortie Res un tri topologique, ou un cycle

$\mathrm{Res} \leftarrow [\ \ ]$
tant que $G \neq \varnothing$ **faire**
    si il existe x sans prédécesseurs **alors**
        Soit x un sommet de G sans prédécesseur
        $G \leftarrow \big(S \setminus \{x\}, A \cap (S \setminus \{x\})^2\big)$
        $\mathrm{Res} \leftarrow \mathrm{Res} \cdot [x]$
    sinon
        Soit $x \in S$
        Soit $x \leftarrow x_1 \leftarrow x_2 \leftarrow \cdots \leftarrow x_i$ la suite des prédécesseurs
        retourner $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_i$, un cycle
retourner Res

6. On utilise la représentation par liste d'adjacence, et on stocke le nombre de prédécesseurs que l'on décroit à chaque choix de sommet.
7. On essaie de trouver un tri topologique, et on voit si l'on trouve un cycle.

3 Détection de graphe biparti

4 Exploration du graphe $\mathfrak{S}_n$

5 Parcours selon le miroir d'un tri préfixe