Td n° 8

Classe **P**, *classe* **NP**

Hugo Salou MPI*
Dernière mise à jour le 22 janvier 2023

1 Problèmes de partitions

1. On définit les quatre problèmes comme

$$\textsc{SubsetSum} : \begin{cases} \textbf{Entrée} & : n \in \mathbb{N},\ (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{N}^n \text{ et } W \in \mathbb{N} \\ \textbf{Sortie} & : \text{Existe-t-il une partie } I \in \wp(\llbracket 1, n \rrbracket) \text{ telle que } \sum_{i \in I} w_i = W\,? \end{cases}$$

$$\textsc{Partition} : \begin{cases} \textbf{Entrée} & : n \in \mathbb{N} \text{ et } (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{N}^n \\ \textbf{Sortie} & : \text{Existe-t-il } I \in \wp(\llbracket 1, n \rrbracket) \text{ telle que } \sum_{i \in I} w_i = \sum_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus I} w_i\,? \end{cases}$$

$$\textsc{Knapsack} : \begin{cases} \textbf{Entrée} & : n \in \mathbb{N},\ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n,\ (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{N}^n,\ P \in \mathbb{N} \text{ et } K \in \mathbb{N} \\ \textbf{Sortie} & : \text{Existe-t-il } I \in \wp(\llbracket 1, n \rrbracket) \text{ telle que } \sum_{i \in I} x_i \leqslant P \text{ et } \sum_{i \in I} v_i \geqslant K\,? \end{cases}$$

$$\textsc{BinPacking} : \begin{cases} \textbf{Entrée} & : n \in \mathbb{N},\ (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{N}^n,\ C \in \mathbb{N} \text{ et } K \in \mathbb{N} \\ \textbf{Sortie} & : \text{Existe-t-il } k \in \mathbb{N} \text{ et } (I_1, \ldots, I_k) \in \wp(\llbracket 1, n \rrbracket)^k\ k \text{ parties de } \llbracket 1, n \rrbracket \\ & \quad \text{telles que } \bigcup_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket} I_i = \llbracket 1, n \rrbracket,\ \forall i \neq j,\ I_i \cap I_j = \varnothing,\ k \leqslant K \text{ et} \\ & \quad \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket,\ \sum_{j \in I_i} t_j \leqslant C\,? \end{cases}$$

2. (a) Soit (Ω, W) une entrée de SubsetSum. On fabrique l'entrée (Ω, Ω, W, W) du problème Knapsack. On pose $\Omega = (w_1, \ldots, w_n)$ et on a

$$\begin{aligned} (\Omega, W) \in \text{SubsetSum}^+ &\iff \exists A \in \wp(\Omega),\ \sum_{w \in A} w = W \\ &\iff \exists A \in \wp(\Omega),\ \sum_{w \in A} w \geqslant W \text{ et } \sum_{w \in A} w \leqslant W \\ &\iff (\Omega, \Omega, W, W) \in \textsc{Knapsack}^+. \end{aligned}$$

Cette réduction est polynômiale.

(b) Soit Ω une entrée de Partition. On pose $\Omega = (w_1, \ldots, w_n)$. Fabriquons l'entrée $(\Omega, S/2)$ du problème SubsetSum, où $S = \sum_{i=1}^{n} w_i$. On suppose $S \equiv 0\ [2]$. On a

$$\begin{aligned} \Omega \in \textsc{Partition} &\iff \exists I \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket\,,\ \sum_{i \in I} w_i = \sum_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus I} w_i \\ &\iff \exists I \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket,\ \sum_{i \in I} w_i = \frac{S}{2} \\ &\iff (\Omega, S/2) \in \textsc{SubsetSum}^+ \end{aligned}$$

2 Optimisation linéaire en nombres entiers

1. Montrons SysLin $\preccurlyeq_{\mathrm{p}}$ SysLinIneg. Soient n, m, A et b les entrées du problème SysLin. Fabriquons, en temps polynômial, les entrées n', m', A', b' du problème SysLinIneg : on choisit $n' = 2n$, $m' = m$, $A' = \binom{A}{-A}$ et $b' = \binom{b}{-b}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} (n', m', A', b') \in \textsc{SysLinIneg}^+ &\iff \exists X,\ A'X \leqslant b' \\ &\iff \exists X,\ AX \leqslant b \text{ et } -AX \leqslant -b \\ &\iff \exists X,\ AX = b \\ &\iff (n, m, A, b) \in \textsc{SysLin}^+ \end{aligned}$$

3 Clique, Stable et Couv.Sommets

1. Soit $G = (S, A)$ un graphe. On pose $G' = (S, A')$ où $A' = \big\{\{x, y\} \in \mathscr{C}_2(S) \,\big|\, \{x, y\} \notin A\big\}$.[1] Prouvons la réduction de Clique à Stable. Soit (G, K) une entrée du problème Clique. Fabriquons l'entrée (G', K) de Stable, comme défini précédemment. Montrons que $(G, K) \in$

1. On note $\mathscr{C}_p(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal p.

Clique$^+$ $\iff$ $(G', K) \in$ Stable$^+$. On a

$$\begin{aligned}(G,K) \in \textsc{Clique}^+ &\iff \exists S_1 \subseteq S_2 \text{ avec } |S_1| \geqslant K,\ \forall x \neq y \in S_1,\ \{x,y\} \in A \\ &\iff \exists S_1 \subseteq S_2 \text{ avec } |S_1| \geqslant K,\ \forall x \neq y,\ \{x,y\} \notin A' \\ &\iff (G', K) \in \textsc{Stable}^+.\end{aligned}$$

La réduction est calculable en temps polynômiale. On a donc Clique $\preccurlyeq_{\mathrm{p}}$ Stable.
La réduction de Stable à Clique est la même. Elle est également en temps polynômiale.

2. Montrons la réduction de CouvSommets à Clique. Soit (G, K) une entrée du problème CouvSommets. Fabriquons $(G', n-K)$ une entrée du problème Stable, où $G' = (S, A')$ comme défini à la question précédente, et $n = |S|$. On a

$$\begin{aligned}&(G,K) \in \textsc{CouvSommets}^+ \\ \iff& \exists S_1 \subseteq S \text{ avec } |S_1| \leqslant K,\ \forall \{x,y\} \in A,\ x \in S_1 \text{ ou } x \in S_2 \\ \iff& \exists S_1 \subseteq S \text{ avec } |S_1| \leqslant K,\ \forall x \neq y \in S \setminus S_1,\ \{x,y\} \notin A \\ \iff& \exists S_1 \subseteq S \text{ avec } |S \setminus S_1| \leqslant |S| - K,\ \forall x \neq y \in S \setminus S_1,\ \{x,y\} \in A' \\ \iff& \exists S_2 \subseteq S \text{ avec } |S_2| \geqslant |S| - K,\ \forall x \neq y \in S_2,\ \{x,y\} \in A' \\ \iff& (G', |S| - K) \in \textsc{Stable}^+.\end{aligned}$$

3. On représente le graphe G pour l'entrée $\{x \vee x \vee y, \neg x \vee \neg y \vee \neg y, x \vee y \vee y\}$.

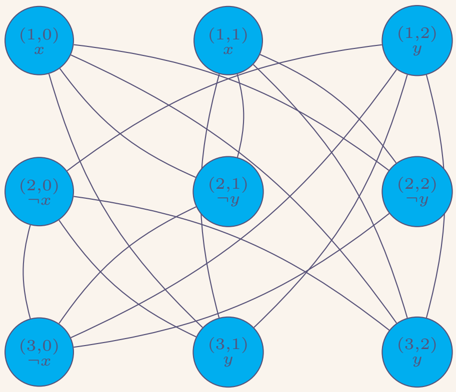

Figure 1 – Représentation du graphe G pour l'entrée $\{x \vee x \vee y, \neg x \vee \neg y \vee \neg y, x \vee y \vee y\}$

4. Montrons la réduction de 3sat à Clique. Soit $H = \{c_1, \dots, c_m\}$ une instance de 3sat. Construisons le graphe G comme proposé dans l'énoncé. On construit alors l'entrée de Clique (G, m). Soit $(G, m) \in$ Clique$^+$. C'est donc qu'il existe une clique de G de taille m ; nommons la C. Deux sommets $(i, \_)$ et $(j, \_)$ ne sont pas reliés dans G si $i = j$. Ainsi,

$$\forall i \in [\![1, m]\!],\ \exists! j \in [\![0, 2]\!],\ (i, j) \in C.$$

Soient p et $\neg p$ deux littéraux. Si $p \in C$, alors $\neg p \notin C$. Si $\neg p \in C$, alors $p \notin C$. On construit alors l'environnement propositionnel

$$\begin{aligned}\rho : \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{B} \\ p &\longmapsto \begin{cases} \boldsymbol{V} & \text{si } p \in C \\ \boldsymbol{F} & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned}$$

Pour $i \in [\![1, m]\!]$, soit $j \in [\![0, 2]\!]$, tel que $(i, j) \in C$, on a donc $[\![\ell_{i,j}]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$. On en déduit que $\forall i \in [\![1, m]\!]$, $[\![c_i]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$. On en déduit que $[\![H]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$, *i.e.* $H \in$ 3sat$^+$.
Réciproquement, supposons $H \in$ 3sat$^+$. Alors, soit $\rho \in \mathbb{B}^{\mathbb{Q}}$ tel que $[\![H]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$. On a

$$\forall i \in [\![1, m]\!],\ \exists j \in [\![0, 2]\!],\ [\![\ell_{i,j}]\!]^\rho = \boldsymbol{V}.$$

Notons $\varphi(i)$ un tel j. On fabrique alors l'ensemble de m sommets $C = \{(i, \varphi(i)) \mid i \in [\![1, m]\!]\}$. Soient $(i, \varphi(i))$ et $(j, \varphi(j))$ deux éléments de C. Si $i \neq j$, alors $\{(i, \varphi(i)), (j, \varphi(j))\} \in A$, car $[\![\ell_{i,\varphi(i)}]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$ et $[\![\ell_{j,\varphi(j)}]\!]^\rho = \boldsymbol{V}$. On en déduit que C est une clique de taille m. Ainsi, $(G, m) \in$ Clique$^+$.

5. Comme Clique est **NP**-difficile, alors Stable et CouvSommets sont **NP**-difficile. Montrons que Clique est un problème **NP**. Le programme Clique est vérifiable en temps polynômiale : ...

4