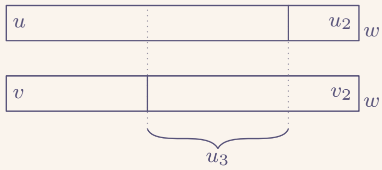
Td n° 3

Langages et expressions régulières

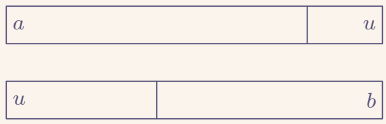
Hugo Salou MPI*
Dernière mise à jour le 22 janvier 2023

1 Propriétés sur les mots

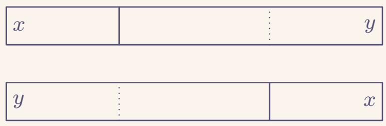
1. Soit $u_2, v_2 \in \Sigma^*$ tels que $w = uu_2$ et $w = vv_2$. Si $|u_2| = |v_2|$, alors $u = v = v\varepsilon$ donc v est préfixe de u. Si $|u_2| < |v_2|$, u_2 est suffixe de v_2. Soit $u_3 \in \Sigma^*$ tel que $v_2 = u_2u_3$. Ainsi, $w = vu_3u_2 = uu_2$, d'où $u = vu_3$. On en déduit que v est un préfixe de u. Similairement, si $|u_2| > |v_2|$, par symétrie du problème, en inversant u et v, puis u_2 et v_2, on se trouve bien dans le cas précédent. Ainsi, on a bien u est un préfixe de v.



2. Soit $u = u_1 \dots u_n$ avec, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u_i \in \Sigma$. Or, $au = ub$ donc $au_1 \dots u_n = u_1 \dots u_nb$ donc, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $u_i = u_{i+1}$. Or, $u_1 = a$. De proche en proche, on a $\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ u_i = a$. Or, $u_n = b$ et donc $a = b$. On en déduit également que $u \in a^*$.



3. La suite de la correction de cet exercice est disponible sur *cahier-de-prepa*.



2 Une équivalence sur les mots

La correction de cet exercice est disponible sur *cahier-de-prepa*.

3 Langages

La correction de cet exercice est disponible sur *cahier-de-prepa*.

4 Propriétés sur les opérations régulières

1. On a
$$\varnothing^* = \{\varepsilon\}\ ; \qquad \varnothing \cdot A = \varnothing\ ; \qquad \{\varepsilon\} \cdot A = A.$$

2. *(1)* On procède par double-inclusion.
   - "$\subseteq$" Soit $w \in (A \cdot B) \cdot C$. On pose $w = u \cdot v$ avec $u \in A \cdot B$ et $v \in C$. On pose ensuite $u = x \cdot y$ avec $x \in A$ et $y \in B$. Or, comme l'opération "$\cdot$," pour les mots, est associative, on a bien $w = (x \cdot y) \cdot v = x \cdot (y \cdot v)$, et donc $w \in A \cdot (B \cdot C)$.
   - "$\supseteq$" Soit $w \in A \cdot (B \cdot C)$. On pose $w = u \cdot v$ avec $u \in A$ et $v \in B \cdot C$. On pose ensuite $v = x \cdot y$ avec $x \in B$ et $y \in C$. Or, comme l'opération "$\cdot$," pour les mots, est associative, alors $w = u \cdot (x \cdot y) = (u \cdot x) \cdot y$ et donc $w \in A \cdot (B \cdot C)$.

   (2) On suppose $A \subseteq B$. On a donc $B = A \cup (B \setminus A)$, et par définition $A^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$, et $B^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B^n$. Montrons par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: "$A^n \subseteq B^n$."

— On a $A^0 = \{\varepsilon\} \subseteq B^0 = \{\varepsilon\}$ d'où $P(0)$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n \subseteq B^n$. On a $A^{n+1} = A^n \cdot A$ et $B^{n+1} = B^n \cdot B$. Or, comme $A^n \subseteq B^n$ et $A \subseteq B$, et que "$\cdot$"est croissant (dans l'inclusion), on en déduit que $A^{n+1} \subseteq B^{n+1}$. D'où $P(n+1)$.

(3) On procède par double-inclusion.

"$\supseteq$" On a $A^* = (A^*)^1 \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A^*)^n = (A^*)^*$.

"$\subseteq$" Soit $w \in (A^*)^*$. On pose donc $w = u_1 \dots u_n$ avec, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u_i \in A^*$. On pose également, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u_i = v_{i,1} \dots v_{i,m_i}$ où, pour tout $j \in [\![1, m_i]\!]$, $v_{i,j} \in A$. D'où, $w = v_{11} \dots v_{1,m_1} v_{21} \dots v_{2,m_2} \dots v_{n,m_n} \in A^*$. On en déduit que $(A^*)^* \subseteq A^*$.

(4) On procède par double-inclusion.

"$\subseteq$" On a $\{\varepsilon\} \subseteq A^*$ et donc $A^* = A^* \cdot \{\varepsilon\} \subseteq A^* \cdot A^*$. D'où $A^* \subseteq A^* \cdot A^*$.

"$\supseteq$" Soit $w \in A^* \cdot A^*$. On décompose ce mot : soient $u_1, u_2 \in A^*$ tels que $w = u_1 \cdot u_2$. On pose $n = |u_1|$, et $m = |u_2|$. On décompose également ces deux mots : soient $(w_1, w_2, \dots, w_n) \in A^n$ et $(w_{n+1}, w_{n+2}, \dots, w_{n+m}) \in A^m$ tels que $u_1 = w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_n$ et $u_2 = w_{n+1} \cdot w_{n+2} \cdot \dots \cdot w_{n+m}$. Ainsi,

$$w = w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_n \cdot w_{n+1} \cdot \dots \cdot w_{n+m} \in A^*.$$

D'où $A^* \cdot A^* \subseteq A^*$.

(5) On procède par double-inclusion.

"$\subseteq$" Soit $w \in A \cup B$.

— Si $w \in A$, alors $w \in A^*$, et donc $w = w \cdot \varepsilon \in A^* \cdot B^*$.

— Si $w \in B$, alors $w \in B^*$, et donc $w = \varepsilon \cdot w \in A^* \cdot B^*$.

On a donc bien $A \cup B \subseteq A^* \cdot B^*$, et par croissance de l'étoile, on a bien $(A \cup B)^* \subseteq (A^* \cdot B^*)^*$.

"$\supseteq$" Soit $w \in (A^* \cdot B^*)^*$. On pose

$$\begin{aligned} w = \ & u_{11} \dots u_{1,n_1} v_{11} \dots v_{1,m_1} \\ & \cdot u_{21} \dots u_{2,n_2} v_{21} \dots v_{2,n_2} \\ & \vdots \\ & \cdot u_{p,1} \dots u_{p,n_p} v_{p,1} \dots v_{p,m_p} \end{aligned}$$

où, $u_{i,j} \in A$ et $v_{i,j} \in B$. On a donc $w \in (A \cup B)^*$.

(6) On procède par double-inclusion.

"$\subseteq$" Soit $w \in A \cdot (B \cup C)$. On pose $w = u \cdot v$ avec $u \in A$ et $v \in B \cup C$.

— Si $v \in B$, alors $w = u \cdot v \in A \cdot B$ et donc $w \in (A \cdot B) \cup (A \cdot C)$.

— Si $v \in C$, alors $w = u \cdot v \in A \cdot C$ et donc $w \in (A \cdot B) \cup (A \cdot C)$.

On a bien montré $A \cdot (B \cup C) \subseteq (A \cdot B) \cup (A \cdot C)$.

"$\supseteq$" Soit $w \in (A \cdot B) \cup (A \cdot C)$.

— Si $w \in A \cdot B$, on pose alors $w = u \cdot v$ avec $u \in A$ et $v \in B \subseteq B \cup C$. Ainsi, on a bien $w = u \cdot v \in A \cdot (B \cup C)$.

— Si $w \in A \cdot C$, on pose alors $w = u \cdot v$ avec $u \in A$ et $v \in C \subseteq B \cup C$. Ainsi, on a bien $w = u \cdot v \in A \cdot (B \cup C)$.

On a bien montré $A \cdot (B \cup C) \supseteq (A \cdot B) \cup (A \cdot C)$.

3. *(1)* Soit $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$ avec $a \neq b$. On sait que $abab \in (A \cdot B)^*$. Or, $abab \notin A^* \cdot B^*$ donc $L_1 \nsubseteq L_2$. De plus, $a \in A^* \cdot B^*$ et $a \notin (A \cdot B)^*$ donc $L_2 \nsubseteq L_1$. Il n'y a aucune relation entre L_1 et L_2.

(2) On sait que $(A \cdot B)^* \subseteq (A^* \cdot B^*)^*$ (car $A \cdot B \subseteq A^* \cdot B^*$ et par croissance de l'étoile). Mais, $(A \cdot B)^* \nsupseteq (A^* \cdot B^*)^*$. En effet, avec $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$ où $a \neq b$, on a $ba \in (A^* \cdot B^*)^*$ (d'après la question précédente) mais $ba \notin (A \cdot B)^*$. On a donc seulement $L_1 \subseteq L_2$.

(3) On a $L_1 \subseteq L_2$. En effet, $A \cap B \subseteq B$ donc $(A \cap B)^* \subseteq B^*$ par croissance l'étoile. De même, $A \cap B \subseteq A$ donc $(A \cap B)^* \subseteq A^*$. D'où $(A \cap B)^* \subseteq A^* \cap B^*$. Mais, $L_1 \not\supseteq L_2$. En effet, avec $A = \{a\}$ et $B = \{aa\}$, on a $A \cap B = \varnothing$ et donc $L_1 = (A \cap B)^* = \{\varepsilon\}$, mais, $L_2 = A^* \cap B^* = B^*$ (car $A^* \subseteq B^*$), et donc $L_2 \not\subseteq L_1$.

(4) Comme $A^* \subseteq (A \cup B^*)$ et $B^* \subseteq (A \cup B)^*$, alors $A^* \cup B^* \subseteq (A \cup B)^*$. Mais, $A^* \cup B^* \not\supseteq (A \cup B)^*$. En effet, si $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$ où $a \neq b$, alors on a $ba \in (A \cup B)^*$ mais $ba \notin A^* \cup B^*$. On a donc seulement $L_1 \subseteq L_2$.

(5) On a $L_1 \subseteq L_2$. En effet, soit $w \in A \cdot (B \cap C)$. On pose $w = u \cdot v$ avec $u \in A$ et $v \in B \cap C$. Comme $v \in B$, alors $w = u \cdot v \in A \cdot B$. De même, comme $v \in C$, alors $w = u \cdot v \in A \cdot C$. On a donc bien $w \in (A \cdot B) \cap (A \cdot C)$. D'où $L_1 \subseteq L_2$. Mais, $L_1 \not\supseteq L_2$. En effet, avec $A = \{a, aa\}$, $B = \{b\}$ et $C = \{ab\}$ où $a \neq b$, on a $aab \notin B \cap C = \varnothing$ mais, $aab \in A \cdot B$ et $aab \in A \cdot C$, donc $aab \in L_2$. On a donc seulement $L_1 \subseteq L_2$.

(6) On a, d'après la question 2.

$$L_1 = (A^* \cup B)^* = \big((A^*)^* \cdot B^*\big)^* = (A^* \cdot B^*)^* = (A \cup B)^* = L_2.$$

5 Habitants d'expressions régulières

1. *(1)* Les mots de taille 1, 2, 3 et 4 de $\big((ab)^* \mid a\big)^*$ sont a, aa, ab, aaa, $aaaa$, $abab$, aba, $abaa$, aab, $aaab$ et $aaba$.

   (2) On sait, tout d'abord, que l'expression régulière $\big(a \cdot \big((b \cdot b)^* \mid (a \cdot \varnothing)\big) \cdot b\big) \mid \varepsilon$ est équivalente à $\big(a \cdot (bb)^* \cdot b\big)$. Les mots de taille 1, 2, 3 et 4 sont donc $abbb$ et ab.
2. *(1)* Les mots de taille 1, 2 et 3 de $(a \mid b)^* \cdot (a \mid c)^*$ sont a, b, c, aa, bb, cc, ab, ac, bc, ba, ca, aaa, bbb, ccc, aac, aab, bbc, bba, cca, aba, abc, baa, aca, acc, abb, bca, bcc, cac, bab et caa.

   (2) Les mots de taille 1, 2 et 3 de $(a \cdot b)^* \mid (a \cdot c)^*$ sont ab et ac.

6 Regexp Crossword

`https://regexcrossword.com/`

7 Description d'automates au moyen d'expression régulières

1. $(a \mid b)^* \cdot a \cdot b \cdot b \cdot a \cdot (a \mid b)^*$;
2. $a^* \cdot a \cdot b^*$;
3. $\big(a \cdot (ab)^*\big) \mid \big(a \cdot a \cdot (ba)^*\big)$;
4. $(aa) \cdot (aa)^*$.

8 Vocabulaire des automates

On représente, ci-dessous, l'automate $\mathscr{A}$ décrit dans l'énoncé.

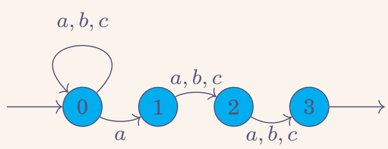


Figure 1 – Automate décrit dans l'énoncé de l'exercice 8

1. Cet automate n'est pas complet : à l'état 0, la lecture d'un a peut conduire à l'état 0 ou bien à l'état 1.

2. Le mot $baba$ est reconnu par $\mathscr{A}$ mais pas le mot $cabcb$.
3. L'automate reconnaît les mots dont la 3<u>ème</u> lettre du mot, en partant de la fin, est un a.

9 Complétion d'automate

1. Non, cet automate n'est pas complet. Par exemple, la lecture d'un b à l'état 1 est impossible.
2. Cet automate reconnaît le langage $L = \mathscr{L}\big(a \cdot b \cdot (a \mid b)^*\big)$.
3.

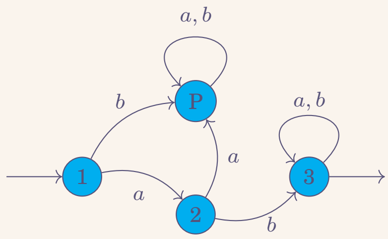
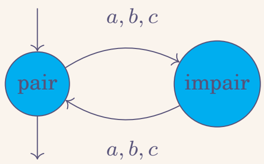
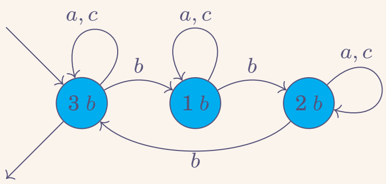
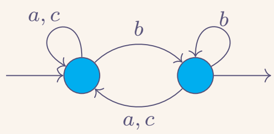


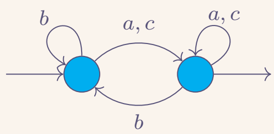
Figure 2 – Automate complet équivalent à $\mathscr{A}$

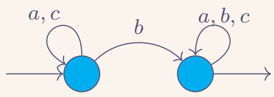
10 Construction d'automates

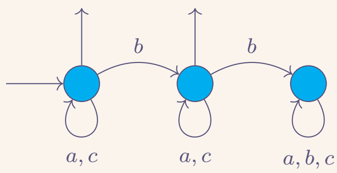
1. 

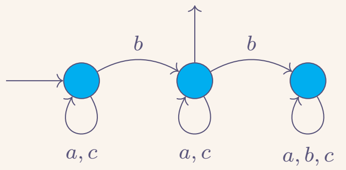
2. 

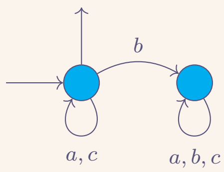
3. 

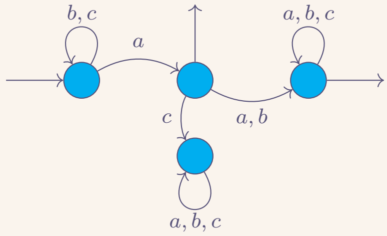
4. 

5. 

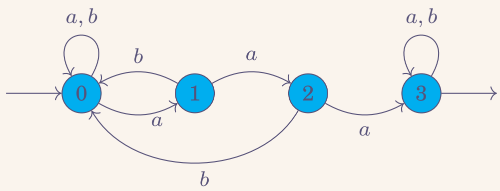
6. 

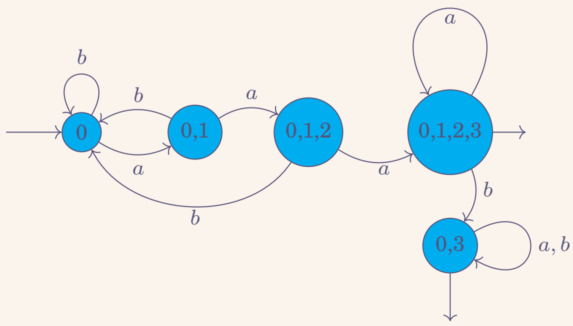
7. 

8. 

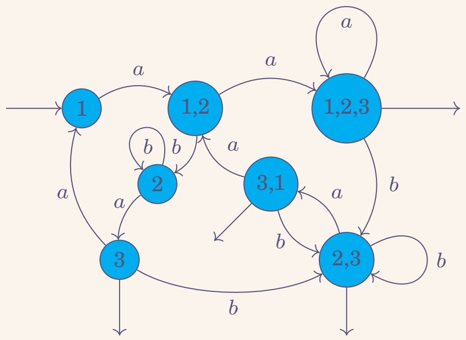
9. 

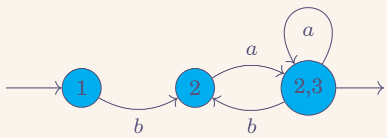
11 Déterminisation 1

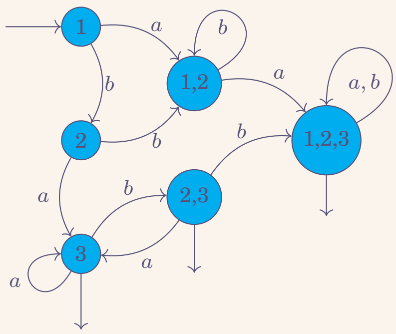
1. 

2. 

12 Déterminisation 2

1. 

2. 

3. 

13 Exercice supplémentaire 1

1. *Montrer que l'ensemble des langages reconnaissables est stable par complémentaire.*
2. *Montrer que l'ensemble des langages reconnaissables est stable par intersection.*

1. Soient $\mathscr{A} = (\Sigma, \mathbb{Q}, I, F, \delta)$ et $\mathscr{A}' = (\Sigma, \mathbb{Q}', I', F', \delta')$ deux automates déterministes complets, tels que $\mathscr{L}(\mathscr{A}) = \mathscr{L}(\mathscr{A}')$. Alors
$$\mathscr{L}\big(\Sigma, \mathbb{Q}', I', \mathbb{Q}' \setminus F', \delta'\big)\big) = \Sigma^* \setminus \mathscr{L}(\mathscr{A}).$$
2. On utilise les lois de De Morgan en passant au complémentaire les deux automates, puis l'union (que l'on a vu en cours), et on repasse au complémentaire.