Annexe H

Complexité moyenne

Hugo Salou MPI*
Dernière mise à jour le 29 mars 2023

Dans les annexes et cours précédents, on a vu la complexité « pire cas » et la complexité amortie. On considère les nombres d'opérations possibles pour toute entrée de taille n. La complexité « pire cas » est la complexité obtenue en prenant le $\max$ d'opération possibilité. Pour la complexité moyenne, on suppose que chaque ensemble d'entrée de taille n est munit d'une probabilité P_n. Par exemple, on considère qu'une entrée est une permutation de n éléments, *i.e.* un élément de $\mathfrak{S}_n$. On suppose que chaque entrée arrive avec équiprobabilité. Ainsi, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $P_n(\sigma) = 1/n!$. Ainsi, on a

$$C_{\max}(n) = \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} C(s) \text{ et } C_{\text{moy}} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} P(\sigma) \cdot C(\sigma).$$

La complexité moyenne est la moyenne des complexité pondérées par les probabilités.

Exemple :
On considère l'algorithme ci-dessous.

Algorithme 1 Calcul d'inverse d'une permutation

Entrée $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $i \in [\![1, n]\!]$
Sortie $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $\sigma(j) = i$.

```
1: pour j ∈ ⟦1, n⟧ faire
2:     si σ(j) = i alors retourner j
```

On munit $\mathfrak{S}_n$ de la probabilité uniforme. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Notons, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\mathfrak{S}_n^j = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(j) = i\}$. Remarquons que $\mathfrak{S}_n = \dot{\bigcup}_{j=1}^n \mathfrak{S}_n^j$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
C_{\text{moy}} &= \sum_{j=1}^n \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^j} P_n(\sigma) C(\sigma) \\
&= \sum_{j=1}^n j \times \frac{|\mathfrak{S}_n^j|}{n!} \\
&= \sum_{j=1}^n j \times \frac{(n+1)!}{n!} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n+1}{2}
\end{aligned}$$