Annexe D

Lemme d'Arden et retour sur le théorème de Kleene

Hugo Salou MPI*

Dernière mise à jour le 8 mars 2023

Exemple (Lemme d'Arden) :
Soient K et L deux langages. Résoudre $X = K \cdot X \cup L$ pour X un langage. (On trouve $X = K^\star \cdot L$.) On suppose que $\varepsilon \notin K$. On procède par double-inclusion.

"$\supseteq$" Soit X un langage tel que $X = K \cdot X \cup L$. Montrons par récurrence « si w est un mot de X de taille n, alors $w \in K^\star \cdot L$.
- Si $n = 0$, alors $w \in L$ car $\varepsilon \notin K$. Ainsi, $w = \varepsilon \cdot w$ et $\varepsilon \in K^\star$. On en déduit que $w \in K^\star \cdot L$.
- Si $|w| = n$, alors
  - si $w \in L$, alors $w = \varepsilon \cdot w$ et donc $w \in K^\star L$.
  - si $w = v \cdot w'$ où $v \in K$ et $w' \in X$, alors $|w'| < |w|$. Ainsi, par hypothèse de récurrence, $w' \in K^\star \cdot L$. Ainsi, $v \cdot w' \in K^\star \cdot L$.

Ainsi, $X \subseteq K^\star \cdot L$.

"$\subseteq$" Soit $w \in K^\star \cdot L$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$, $(v_1, \dots, v_n) \in K^n$ et $w' \in L$ tels que $w = v_1 \cdot \ldots \cdot v_n \cdot w'$. Alors, $w' \in X$ donc $v_n \cdot w' \in X$ donc ... donc $v_1 v_2 \dots v_n w' \in X$. Ainsi, $w \in X$.

Exemple :
On considère l'automate ci-dessous.

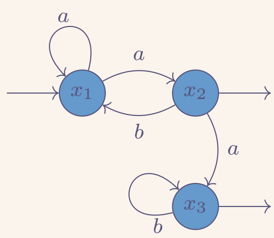

Figure 1 – Automate exemple ($\mathscr{A}$)

On pose $X_i = \mathscr{L}\big((\Sigma, \mathbb{Q}, \{i\}, F, \delta)\big)$, où x_i est l'unique point de départ. Ainsi, $\mathscr{L}(\mathscr{A}) = \bigcup_{i \in I} X_i$. Déterminons les valeurs de X_1, X_2 et X_3. On applique un algorithme similaire au « pivot de Gauß. »

$$
\left.\begin{array}{ll}
X_1 & = \{a\} \cdot X_2 \cup \{a\} X_1 \\
X_2 & = \{b\} \cdot X_1 \cup \{a\} \cdot X_3 \cup \{\varepsilon\} \\
X_3 & = \{b\} X_3 \cup \{\varepsilon\}
\end{array}\right\}
\iff
\begin{cases}
X_1 & = \{a\}^\star \cdot \{a\} \cdot X_2 \\
X_2 & = \mathscr{L}(ba^\star \cdot a) X_2 \cup \{a\} X_3 \cup \{\varepsilon\} \\
X_3 & = \{b\} \cdot X_3 \cup \{\varepsilon\}
\end{cases}
$$

$$
\iff
\begin{cases}
X_1 & = \mathscr{L}(a^\star \cdot a) X_2 \\
X_2 & = \mathscr{L}\big((b \cdot a^\star \cdot a)^\star\big) \cdot \big(\{a\} X_3 \cup \{\varepsilon\}\big) \\
X_3 & = \{b\} X_3 \cup \{\varepsilon\}
\end{cases}
$$

$$
\iff
\begin{cases}
X_1 & = \mathscr{L}(a^\star \cdot a) X_2 \\
X_2 & = \mathscr{L}\big((b \cdot a^\star \cdot a)^\star\big) \cdot \big(\{a\} X_3 \cup \{\varepsilon\}\big) \\
X_3 & = \mathscr{L}(b^\star)
\end{cases}
$$

$$
\iff
\begin{cases}
X_1 & = \mathscr{L}(a^\star \cdot a) X_2 \\
X_2 & = \mathscr{L}\big((ba^\star a)^\star \cdot (ab^\star \mid \varepsilon)\big) \\
X_3 & = \mathscr{L}(b^\star)
\end{cases}
$$

$$
\iff
\begin{cases}
X_1 & = \mathscr{L}\big(a^\star \cdot a \cdot (ba^\star a)^\star \cdot (ab^\star \mid \varepsilon)\big) \\
X_2 & = \mathscr{L}\big((ba^\star a)^\star \cdot (ab^\star \mid \varepsilon)\big) \\
X_3 & = \mathscr{L}(b^\star)
\end{cases}
$$

On peut généraliser la méthode employée dans l'exemple précédent pour montrer que tout langage reconnaissable est régulier.