TD n°1
Théorie des catégories

Hugo Salou
Dept. Informatique

ENS DE LYON

8 octobre 2024

Table des matières

Exercice 1.

Montrer que la composition de deux monomorphismes est un monomorphisme. Énoncer et prouver l'énoncé dual.

Soit $\mathbf{C}$ une catégorie. Soient $u, v : A \to B$ deux morphismes et soient $f : B \to C$ et $g : C \to D$ deux monomorphismes.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "v"'] \arrow[rr, bend left=50, "f\circ u"] \arrow[rr, bend right=50, "f\circ v"'] & B \arrow[r, tail, "f"] & C \arrow[r, tail, "g"] & D .
\end{tikzcd}$$

Supposons que $g \circ f \circ u = g \circ f \circ v$, alors (par associativité de $\circ$ et monomorphisme g) on a $f \circ u = f \circ v$. Mais, par le monomorphisme f, on en déduit que $u = v$. Ceci montre que l'on $g \circ f$ est un monomorphisme.

La propriété duale est que la composition de deux épimorphismes est un épimorphisme. Par dualité de la preuve précédente, on obtient le résultat.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, two heads, "g"] & B \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[rr, bend left=50, "u\circ f"] \arrow[rr, bend right=50, "v\circ f"'] & C \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "v"'] & D .
\end{tikzcd}$$

Exercice 2.

Soit $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ et $G : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ deux foncteurs contravariants. Montrer que $G \circ F : \mathbf{C} \to \mathbf{E}$ est covariant.

Soient u et v deux morphismes composables de $\mathbf{C}$. On calcule

$$G \circ F(u \circ v) = G(F(v) \circ F(u)) = G(F(u)) \circ G(F(v)).$$

On en déduit donc que le foncteur $G \circ F$ est covariant.

Exercice 3.

Montrer que si F est un foncteur fidèle et si $F(f)$ est un monomorphisme alors f est un monomorphisme.

Soit $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un foncteur fidèle. Soit de plus $(f : B \to C) \in \mathbf{C}_1$ tel que $F(f)$ soit un monomorphisme. Soient $u, v : A \to B$ deux morphismes de $\mathbf{C}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "v"'] & B \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, bend left, "F(u)"] \arrow[r, bend right, "F(v)"'] & F(B) \arrow[r, tail, "F(f)"] & F(C) \end{tikzcd}.$$

Supposons que $F(u) \circ F(f) = F(v) \circ F(f)$. On sait donc, par le monomorphisme $F(f)$, que $F(u) = F(v)$. Et par fidélité de F (injectivité pour les morphismes), on en déduit que $u = v$.

On en déduit que f est un monomorphisme.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "v"'] & B \arrow[r, tail, "f"] & C \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, bend left, "F(u)"] \arrow[r, bend right, "F(v)"'] & F(B) \arrow[r, tail, "F(f)"] & F(C) \end{tikzcd}.$$

Exercice 4.

Soient $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ deux catégories. Définir une catégorie $[\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ (aussi notée $\mathbf{Fun}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$) telle que ses objets sont les foncteurs de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{D}$, et ses morphismes sont les transformations naturelles entre ces foncteurs.

On définit la catégorie $[\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ par

- ses objets sont les foncteurs de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{D}$;
- ses morphismes sont les transformations naturelles entre foncteurs ;
- sa loi de composition est, pour η et ε deux transformations naturelles, $(\varepsilon \circ \eta)_A = \varepsilon_A \circ \eta_A$ quel que soit $A \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$.

Nous devons montrer que l'opération $\circ_{[\mathbf{C},\mathbf{D}]}$ est associative et unitaire. Mais, ces propriétés découlent clairement de l'associativité et de l'unitarité de la loi $\circ_{\mathbf{C}}$.

Exercice 5.

Soient $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ deux foncteurs. On suppose que F et G sont isomorphes (il existe un isomorphisme naturel entre F et G). Montrer que F est plein, ou fidèle, ou quasi-inversible si, et seulement si, G l'est.

On procède en trois temps. Pour chaque propriété, on ne démontre qu'une implication mais, vue la symétrie des propriétés (et car l'inverse d'un isomorphisme est un isomorphisme), ceci démontre l'équivalence.

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, rightsquigarrow, "\eta_A"] & F(B) \arrow[d, rightsquigarrow, "\eta_B"] \\ G(A) \arrow[r, "G(f)"] & G(B) \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

On note ici $\eta_A : F(A) \rightsquigarrow G(A)$ lorsque η_A est un isomorphisme de $F(A)$ à $G(A)$.

5.A Stabilité de « plein » par isomorphisme.

Supposons F plein.

Soit $\alpha : A \to B$ un morphisme de $\mathbf{D}$. Par surjectivité, il existe un morphisme f tel que $F(f) = \alpha$. On pose $g = \eta_A^{-1} \circ f \circ \eta_B$ de telle sorte que l'on ait $Gg = \alpha$ (*c.f.* diagramme commutatif 5.1).

D'où, G est plein.

5.B Stabilité de « fidèle » par isomorphisme.

Supposons F fidèle.

Soient $f, g : A \to B$ dans $\mathbf{C}$ tels que $G(f) = G(g)$ (on notera l'hypothèse $(\star)$). Montrons que $f = g$.

On calcule

$$\eta_B \circ F(g) =_{(5.1)} G(g) \circ \eta_A =_{(\star)} G(f) \circ \eta_B =_{(5.1)} \eta_B \circ F(f).$$

D'où, $F(g) = F(f)$ car η_A et η_B sont des isomorphismes donc des monomorphismes. On en déduit que $f = g$, car F est supposé fidèle.

On en déduit que G est fidèle.

5.C Stabilité de « quasi-inversible » par isomorphisme.

Supposons F quasi-inversible. Par le théorème de caractérisation des équivalences, on sait que F est pleinement fidèle et essentiellement surjective. Pour montrer que G est quasi-inversible, il suffit de montrer que :

- ▷ G est plein (prouvé en 5.A) ;
- ▷ G est fidèle (prouvé en 5.B) ;
- ▷ G est essentiellement surjectif.

Il ne reste que le dernier point à démontrer. Soit Y un objet de $\mathbf{D}$, montrons qu'il existe $X \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ tel que $G(X)$ et Y sont isomorphes dans $\mathbf{D}$. On sait qu'il existe $X \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ tel que $G(X)$ et Y sont isomorphes ; soit un tel X.

$$Y \rightsquigarrow F(X) \overset{\eta_X}{\rightsquigarrow} G(X) \ .$$

Ainsi, par composition d'isomorphismes, on sait que Y et $G(X)$ sont isomorphes.

On en conclut que G est quasi-inversible.

Exercice 6.

Soit $\mathbf{C}$ une catégorie possédant un objet final $\mathbb{F}$. Montrer que tout morphisme $f : \mathbb{F} \to X$ est un monomorphisme. Énoncer et prouver l'énoncé dual.

Comme $\mathbb{F}$ est final, on sait donc que $\#\mathrm{Hom}(X, \mathbb{F}) = 1$ quel que soit l'objet $X \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$. Soit $f : \mathbb{F} \to Z$ et soient $u, v : X \to \mathbb{F}$ des morphismes quelconques. Supposons que $f \circ u = f \circ v$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "v"'] & \mathbb{F} \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd} .$$

Comme $u, v \in \mathrm{Hom}(X, \mathbb{F})$ de cardinal 1, on en déduit que $u = v$.

D'où f est un monomorphisme.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "v"'] & \mathbb{F} \arrow[r, tail, "f"] & Z \end{tikzcd} .$$

L'énoncé dual est : tout morphisme $g : X \to \mathbb{I}$ est un épimorphisme, où $\mathbb{I}$ est un objet initial de $\mathbf{C}$. Pour le démontrer, il suffit de procéder par dualité : le dual d'un objet initial est un objet final et le dual d'un épimorphisme est un monomorphisme.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, two heads, "g"] & \mathbb{I} \arrow[r, bend left, "u"] \arrow[r, bend right, "v"'] & Z \end{tikzcd} .$$

Exercice 7.

Soit $\mathbf{Ens_f}$ *la sous-catégorie pleine de* $\mathbf{Ens}$ *dont les objets sont des ensembles finis. On définit une sous-catérorie pleine* $\mathbf{C}$ *de* $\mathbf{Ens_f}$ *dont les objets sont les sous-ensembles de* $\mathbb{N}$ *de la forme* $[\![1, n]\!] = \{1, \ldots, n\}$*. Prouver que le foncteur d'inclusion de* $\mathbf{C}$ *dans* $\mathbf{Ens_f}$ *est une équivalence, de sorte que* $\mathbf{C}$ *soit un squelette de* $\mathbf{Ens_f}$*.*

Soit

$$\begin{aligned} F : \mathbf{C} &\longrightarrow \mathbf{Ens_f} \\ A &\longmapsto A \\ (u : A \to B) &\longmapsto (u : A \to B) \end{aligned}$$

le foncteur d'inclusion de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{Ens_f}$. On applique le critère d'équivalence. Pour cela, il suffit de montrer que F est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.

- ▷ Le foncteur F est pleinement fidèle. En effet, l'application

  $$\begin{aligned} \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(A,B)} : \mathrm{Hom}(A, B) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(F(A), F(B)) = \mathrm{Hom}(A, B) \\ f &\longmapsto f \end{aligned}$$

  est trivialement injective et surjective.
- ▷ Le foncteur F est essentiellement surjectif. En effet, soit un ensemble fini $Y \in \mathrm{ob}(\mathbf{Ens_f})$. On pose la partie $X = [\![1, n]\!]$ de $\mathbb{N}$ où $n = \#Y$ (qui existe car Y fini). On conclut par

  $$F(X) = [\![1, \#Y]\!] \cong Y.$$

On en déduit que F définit une équivalence.

Pour justifier que $\mathbf{C}$ est un squelette, il suffit de remarquer que l'on a $[\![1, n]\!] \cong S$ si, et seulement si $n = \#S$ où $S \in \mathrm{ob}(\mathbf{Ens_f})$.

Exercice 8.

Montrer que **Ens** *n'est pas équivalente à* $\mathbf{Ens}^{\mathrm{op}}$*.*

Par l'absurde, supposons les deux catégories équivalentes.

Soit $F : \mathbf{Ens} \to \mathbf{Ens}^{\mathrm{op}}$ un foncteur d'équivalence et soit Y un ensemble fini non-vide.

Remarquons que

- ▷ il existe une unique fonction de l'ensemble vide $\emptyset$ vers un autre ensemble quelconque Y ;
- ▷ il n'existe aucune fonction de Y vers $\emptyset$.

Par équivalence et car un isomorphisme conserve le cardinal,

$$\#\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}(\emptyset, Y) = \#\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}^{\mathrm{op}}}(\emptyset, Y) = \#\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}(Y, \emptyset).$$

Mais, ceci est absurde : $\#\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}(\emptyset, Y) = 1$ et $\#\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ens}}(Y, \emptyset) = 0$ (car Y supposé non vide).

Exercice 9.

1. *Montrer que l'application qui, à un groupe G associe son centre, et à un morphisme sa restriction au centre, n'est pas un foncteur.*
2. *Construire un foncteur $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$ envoyant un groupe G sur son « abélianisé » $G^{\mathrm{ab}} = G/D(G)$ où*

$$D(G) = \left\langle\, ghg^{-1}h^{-1} \;\middle|\; g, h \in G \,\right\rangle.$$

1. On procède par l'absurde. On considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   Or, on sait que le centre de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de la forme $\lambda \mathbf{I}_n$ où $\lambda \in \mathbb{R}^\star$. Ainsi, l'application $\varphi\big|_{Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))}$ **n'est pas** à valeur dans $Z(\mathrm{GL}_3(\mathbb{R}))$.

   Par exemple, la matrice $\boldsymbol{A} = 2\mathbf{I}_2$ est dans le centre de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ mais la matrice

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0}_{2\times 1} \\ \mathbf{0}_{1\times 2} & \mathbf{I}_1 \end{pmatrix}$$

   n'y est pas.
2. On pose l'application

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbf{Grp} &\longrightarrow \mathbf{Ab} \\ G &\longmapsto G^{\mathrm{ab}} = G/D(G) \\ (u : G \to H) &\longmapsto (\Psi(u) : G^{\mathrm{ab}} \to H^{\mathrm{ab}}). \end{aligned}$$

Justifions de la construction de $\Phi(u)$. On note $\pi_G : G \to G^{\text{ab}}$ et $\pi_H : H \to H^{\text{ab}}$ les projections canoniques sur G^{ab} et H^{ab} respectivement. On pose $f = \pi_H \circ u : G \to H^{\text{ab}}$. Et, on factorise le morphisme f par $D(G)$:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_G"'] & & H^{\text{ab}} \\ & G^{\text{ab}} \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}.$$

Ceci peut être effectué car :

- ▷ on a $D(G) \lhd G$;
- ▷ on a $D(G) \subseteq \ker f$ car, pour $g, h \in G$, on a

$$u(g\,h\,g^{-1}\,h^{-1}) = u(g)\,u(h)\,u(g)^{-1}\,u(h)^{-1} \in D(H),$$

  d'où $\ker f = \ker(\pi_H \circ u) \supseteq D(G)$.

Il ne reste que deux points à vérifier :

- ▷ $\Psi(\mathrm{id}_G) = \mathrm{id}_{G^{\text{ab}}}$, ce qui découle clairement de la définition de Ψ pour les morphismes.
- ▷ $\Psi(u \circ v) = \Psi(u) \circ \Psi(v)$, où $v : G \to H$ et $u : H \to K$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "v"] \arrow[rr, bend left, "u\circ v"] \arrow[d, "\pi_G"] & H \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\pi_H"] & K \arrow[d, "\pi_K"] \\ \Psi(G) \arrow[r, "\Psi(v)"] \arrow[rr, bend right, "\Psi(u)\circ\Psi(v)"'] & \Psi(H) \arrow[r, "\Psi(y)"] & \Psi(K) \end{tikzcd}$$

  Pour démontrer l'égalité souhaitée, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}(\Psi(v) \circ \Psi(u))(g\,D(G)) &= \Psi(v)(\Psi(u)(g\,D(G))) \\ &= \Psi(v)(u(g)\,D(H)) = v(u(g))\,D(K),\end{aligned}$$

  car l'égalité $\Psi(u)(g\,D(G)) = u(g)\,D(H)$ est vérifiée (et de même pour v).

Exercice 10.

Soit G un groupe. On considère la catégorie (encore notée G) où le seul objet est $\bullet$, et où $\mathrm{Hom}(\bullet, \bullet) = G$. Plus précisément, les morphismes sont indexés par G, et si $g, h : \bullet \to \bullet$ sont deux morphismes, leur composé est $g \circ h = gh : \bullet \to \bullet$. Soient G et H deux groupes vus comme des catégories.

1. *Décrire les foncteurs de G vers H.*

2. *Soit S et T deux foncteurs $G \to H$. Montrer qu'il existe une transformation naturelle $S \Rightarrow T$ si, et seulement si, S et T sont conjugués (i.e. il existe $h \in H$ tel que, pour tout $g \in G$, on ait $T(g) = h\, S(g)\, h^{-1}$).*

1. Les foncteurs F de G vers H vérifient :

- ▷ $F(1_G) = 1_H$;
- ▷ $F(gh) = F(g \circ h) = F(g) \circ F(h) = F(g)\, F(h)$;
- ▷ $F(g^{-1}) = (F(g))^{-1}$, en effet :

$$F(g^{-1}) \circ F(g) = F(g^{-1}\, g) = F(1_G) = F(g\, g^{-1}) = F(g) \circ F(g^{-1}).$$

Ce sont donc les homomorphismes de groupes de G vers H.

2. On procède par équivalence.

On a une transformation naturelle $\varphi : S \Rightarrow T$ si, et seulement si le diagramme

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "S(g)"] \arrow[d, "\varphi_\bullet"] & \bullet \arrow[d, "\varphi_\bullet"] \\ \bullet \arrow[r, "T(g)"] & \bullet \end{tikzcd}$$

commute, ce qui est vrai si, et seulement si $\varphi_\bullet \circ T(g) = S(g) \circ \varphi_\bullet$. Et, par définition de la catégorie G et que $\varphi_\bullet$ est un morphisme de la catégorie G, il existe donc $h \in G$ tel que $\varphi_\bullet = h$. Ceci termine l'équivalence :

$$\varphi : S \Rightarrow T \iff h\, T(g) = S(g)\, h \iff T(g) = h\, S(g)\, h^{-1}.$$

Exercice 11.

Soient A et B deux ensembles, leur ensemble des parties peuvent être minis de l'ordre partiel $\subseteq$. On peut alors considérer leur catégorie posétale, toujours notées $\wp(A)$ et $\wp(B)$.

1. *Représenter sous forme d'un graphe la catégorie $\wp(\{1, 2, 3\})$ (faire un dessin avec des points et des flèches).*

2. *Soit $f : A \to B$ une application. Montrer que l'image directe et l'image réciproque définies ci-dessous définissent des foncteurs entre ces catégories :*

$$\begin{aligned} f : \wp(A) &\longrightarrow \wp(B) \\ S &\longmapsto \{f(a) \mid a \in S\} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f^{-1} : \wp(B) &\longrightarrow \wp(A) \\ S &\longmapsto \{a \in A \mid f(a) \in S\}. \end{aligned}$$

(N'oubliez pas de définir l'action de f et f^{-1} sur les morphismes de ces catégories !)

3. *Conclure que l'ensemble des parties $\wp$ peut être vu comme un foncteur covariant **Ens** $\to$ **Cat**, ou un foncteur contravariant **Ens** $\to$ **Cat** en fonction de l'action sur les morphismes choisie.*

1. On dessine le graphe (simplifié par la transitivité et réflexivité de $\subseteq$) :

$$\begin{tikzcd}
 & \emptyset \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & \{1\} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
\{2\} \arrow[rr] \arrow[dd] & & \{1,2\} \arrow[dd] & \\
 & \{3\} \arrow[rr] \arrow[dl] & & \{1,3\} \arrow[dl] \\
\{2,3\} \arrow[rr] & & \{1,2,3\}. &
\end{tikzcd}$$

2. Procédons en deux temps. On se rappelle que l'on considère une catégorie *posétale.*
   - ▷ On définit
     $$\begin{aligned} f : \mathbf{Ens} &\longrightarrow \mathbf{Ens} \\ A &\longmapsto f(A) \\ (u : A \to B) &\longmapsto (f(u) : f(A) \to f(B)). \end{aligned}$$
     Montrons que c'est un foncteur covariant.
     – On a $f(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{f(A)}$ car $\mathrm{Hom}(A, A) = \{u_{A,A} = \mathrm{id}_A\}$ et $\mathrm{Hom}(f(A), f(A)) = \{u_{f(A),f(A)} = \mathrm{id}_{f(A)}\}$.
     – Si on a $a : X \to Y$ et $b : Y \to Z$, alors on a l'égalité $f(b \circ a) = f(b) \circ f(a)$. En effet, en langage ensembliste, on a $X \subseteq Y \subseteq Z$ et on doit montrer que
     $$f(X) \subseteq f(Y) \subseteq f(Z),$$
     ce qui est vrai par croissance (pour $\subseteq$) de l'image directe.

     On en conclut que f est un foncteur covariant.
   - ▷ On définit
     $$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbf{Ens} &\longrightarrow \mathbf{Ens} \\ A &\longmapsto f^{-1}(A) \\ (u : A \to B) &\longmapsto (f^{-1}(u) : f^{-1}(A) \to f^{-1}(B)). \end{aligned}$$
     Montrons que c'est un foncteur covariant.

- On a $f^{-1}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{f^{-1}(A)}$ car

$$\mathrm{Hom}(A, A) = \{u_{A,A} = \mathrm{id}_A\}$$

et

$$\mathrm{Hom}(f^{-1}(A), f^{-1}(A)) = \{u_{f^{-1}(A), f^{-1}(A)} = \mathrm{id}_{f^{-1}(A)}\}.$$

- Si on a $a : X \to Y$ et $b : Y \to Z$, alors on a l'égalité $f^{-1}(b \circ a) = f^{-1}(b) \circ f^{-1}(a)$. En effet, en langage ensembliste, on a $X \subseteq Y \subseteq Z$ et on doit montrer que

$$f^{-1}(X) \subseteq f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(Z),$$

ce qui est vrai par croissance (pour $\subseteq$) de l'image réciproque.

On en conclut que f^{-1} est un foncteur covariant.

3. On pose le foncteur

$$\begin{aligned} \wp : \mathbf{Ens} &\longrightarrow \mathbf{Cat} \\ A &\longmapsto \wp(A) \\ (u : A \to B) &\longmapsto \boxed{?}. \end{aligned}$$

▷ Avec $\boxed{?} = (\wp(u) : \wp(A) \to \wp(B))$ défini comme l'image directe, on définit un foncteur $\wp$ covariant.

▷ Avec $\boxed{?} = (\wp(u) : \wp(B) \to \wp(A))$ défini comme l'image réciproque, on définit un foncteur $\wp$ contravariant.