

# Théorèmes d'isomorphismes et actions de groupes.

## 1 Exercice 1. *Groupes monogènes*

Soit  $G$  un groupe monogène. Montrer que soit  $G \cong \mathbb{Z}$ , soit  $G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  pour un entier strictement positif  $n$ .

Soit  $g \in G$  tel que  $\langle g \rangle = G$ . Considérons le morphisme

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{Z} &\longrightarrow G \\ k &\longmapsto g^k.\end{aligned}$$

On a  $\text{im } \phi = \langle g \rangle = G$ . De plus, par le premier théorème d'isomorphisme

$$\mathbb{Z}/\ker \phi \cong \text{im } \phi = G.$$

- ▷ Si  $\ker \phi$  est le sous-groupe trivial  $\{0\}$ , on a donc  $G \cong \mathbb{Z}$ .
- ▷ Si  $\ker \phi$  est un sous-groupe non trivial de  $\mathbb{Z}$ , alors  $\ker \phi = n\mathbb{Z}$ , et on a donc  $G \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

## 2 Exercice 2.

Soit  $n > 0$  un entier.

1. Montrer que  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  contient  $\varphi(n)$  éléments d'ordre  $n$ , où  $\varphi(n)$  désigne le nombre d'entiers  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  premiers à  $n$ .
2. Montrer que pour tout  $d > 0$  divisant  $n$ ,  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  admet un unique sous-groupe d'ordre  $d$  formé des multiples de  $n/d$ .
3. En déduire que pour tout diviseur  $d > 0$  de  $n$ ,  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  contient  $\varphi(d)$  éléments d'ordre  $d$  et que  $\sum_{0 < d|n} \varphi(d) = n$ .

1. Soit  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Montrons que  $\langle \bar{k} \rangle = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  si et seulement si  $\text{pgcd}(k, n) = 1$ .

▷ Si  $\langle \bar{k} \rangle = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  alors il existe  $a \in \mathbb{Z}$  tel que

$$a\bar{k} = \underbrace{\bar{k} + \dots + \bar{k}}_{a \text{ fois}} = \bar{1}.$$

Ainsi, il existe  $b \in \mathbb{Z}$  tel que  $ak - 1 = bn$ , soit  $ak + bn = 1$ . On en conclut, par le théorème de Bézout, que  $k$  et  $n$  sont premiers entre-eux.

▷ Si  $\text{pgcd}(k, n) = 1$  alors il existe  $a, b \in \mathbb{Z}$  tels que  $ak + bn = 1$  et donc  $ak \equiv 1 \pmod{n}$ . Ainsi,  $k + \dots + k \equiv 1 \pmod{n}$ . Or,  $\langle \bar{1} \rangle = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et donc, comme  $\langle \bar{1} \rangle \subseteq \langle \bar{k} \rangle$  on a que

$$\langle \bar{k} \rangle = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Par bijection, on a donc

$$\varphi(n) = \#\{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \mid \text{pgcd}(k, n) = 1\}$$

éléments d'ordre  $n$ .

2. On sait que  $\langle \overline{n/d} \rangle$  est un groupe, et  $d \overline{n/d} = \bar{n} = \bar{0}$ . Ainsi, on a que  $\#\langle \overline{n/d} \rangle = d$ . Il ne reste qu'à montrer l'unicité. Soit un sous-groupe  $H \leq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  d'ordre  $d$ . Soit  $\bar{a} \in H$  tel que  $d\bar{a} = \bar{0}$ . Ainsi, il existe  $b \in \mathbb{Z}$  tel que  $da = nb$ , d'où  $a = nb/d$  et donc  $\bar{a} = \overline{bn/d}$ . On en déduit que  $\bar{a} \in \langle \overline{n/d} \rangle$ . On conclut que  $H = \langle \overline{n/d} \rangle$  par inclusion et égalité des cardinaux.
3. Soit  $\bar{a}$  un élément d'ordre  $d$ , et donc  $\#\langle \bar{a} \rangle = d$ . Par la question 2 et l'exercice 1, on a  $\langle \bar{a} \rangle = \langle \overline{n/d} \rangle \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ . Or, par la question 1, il y a  $\varphi(d)$  éléments d'ordre  $d$  dans  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ . Ainsi, il y a  $\varphi(d)$  éléments d'ordre  $d$  dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

Posons  $A_d := \{\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid \#\langle \bar{a} \rangle = d\}$ . Si  $d \nmid n$  alors  $A_d = \emptyset$  car l'ordre d'un élément divise  $n$  (théorème de LAGRANGE). Si  $d \mid n$  alors  $\#A_d = \varphi(d)$  (question 2). De plus,

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \bigsqcup_{d \mid n} A_d,$$

d'où

$$n = \sum_{d \mid n} \#A_d = \sum_{d \mid n} \varphi(d).$$

– 2/12 –

### 3 Exercice 3.

1. Montrer que le groupe  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est simple si, et seulement si,  $n$  est premier.
2. Soit  $G$  un groupe fini abélien. Montrer que  $G$  est simple si et seulement si  $G \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  avec  $p$  un nombre premier.

1. Le groupe  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est commutatif. Ainsi, tout sous-groupe de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est distingué. On a donc que  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est simple si, et seulement si,  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ne possède pas de sous-groupes non triviaux. De plus, un entier  $n$  n'a que des diviseurs triviaux (1 ou  $n$ ) si et seulement si  $n$  est premier. Et, avec le théorème de LAGRANGE, on sait que l'ordre de tout sous-groupe de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  divise  $n$ . D'où l'équivalence.
2. Le groupe  $G$  est commutatif. Ainsi, tout sous-groupe de  $G$  est distingué. On a donc que  $G$  est simple si, et seulement si,  $G$  ne possède pas de sous-groupes non triviaux. Ainsi, par le théorème de LAGRANGE, l'ordre du groupe  $G$  est premier.

### 4 Exercice 4.

Soit  $G$  un groupe et  $H$  un sous-groupe de  $G$  d'indice 2. Montrer que  $H$  est distingué dans  $G$ . Montrer que le résultat n'est pas vrai si on remplace 2 par 3.

Soit  $g \in G \setminus H$ . On a la partition  $G = H \sqcup gH$ . Ainsi  $gH$  est le complément de  $H$  dans  $G$ . Similairement,  $Hg$  est le complément de  $H$  dans  $G$ . Ainsi, on a  $gH = Hg$ .

Si  $h \in H$ , alors  $hH = H = Hh$  car  $H$  est un sous-groupe contenant les éléments  $h$  et  $h^{-1}$ .

On en conclut, dans les deux cas, que  $H \triangleleft G$ .

Pour montrer que le résultat est faux en remplaçant 2 par 3, on considère  $G := \mathfrak{S}_3$  et  $H := \{\text{id}, (1\ 2)\}$  un sous-groupe de  $G$ . Le sous-groupe  $H$  a pour indice  $[G : H] = |\mathfrak{S}_3|/|H| = 3$ . Cependant,  $H$  n'est

pas un sous-groupe distingué de  $G$  :

$$(1\ 2\ 3)(1\ 2)(1\ 2\ 3)^{-1} = (2\ 3) \notin H.$$

## 5 Exercice 5.

Soit  $p$  un nombre premier.

1. Rappeler pourquoi le centre d'un  $p$ -groupe est non trivial.
  2. Montrer que tout groupe d'ordre  $p^2$  est abélien, classifier ces groupes.
  3. Soit  $G$  un groupe d'ordre  $p^n$ . Montrer que  $G$  admet un sous-groupe distingué d'ordre  $p^k$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .
1. Soit  $G$  un  $p$ -groupe non trivial. On fait agir  $G$  sur  $G$  par conjugaison. Ainsi, par la formule des classes, on a

$$p^n = \#G = \#Z(G) + \sum_{g \in \mathcal{R}} \underbrace{[G : C_G(g)]}_{p^{x_i} > 1},$$

où  $\mathcal{R}$  est un système de représentants des classes de conjugaisons de  $G$  contenant plus d'un élément.

On sait donc que  $p \mid \sum_{g \in \mathcal{R}} [G : C_G(g)]$  et  $p \mid \#G$ , ce qui permet d'en déduire que  $p \mid \#Z(G)$ . D'où,  $Z(G)$  n'est pas trivial.

2. Le centre de  $G$  est un sous-groupe, d'où par le théorème de LAGRANGE et par la question 1, on sait que l'ordre de  $Z(G)$  est  $p$  ou  $p^2$ .
  - ▷ Dans le cas où  $Z(G)$  est d'ordre  $p^2$ , on a  $Z(G) = G$ , d'où  $G$  abélien.
  - ▷ Supposons  $\#Z(G) = p$ . Soit  $x \in G \setminus Z(G)$ , et considérons le sous-groupe

$$Z(x) := \{g \in G \mid gx = xg\} \leq G.$$

En deux temps, montrons que  $Z(G) \subsetneq Z(x) \subsetneq G$ .

- On a l'inclusion  $Z(G) \subseteq Z(x)$  mais cette inclusion est stricte car  $x \in Z(x) \setminus Z(G)$ .

- Montrons que  $Z(x) \neq G$ . Par l'absurde, si  $Z(x) = G$ , alors  $x$  commute avec tout élément de  $G$ , et donc  $x \in Z(G)$ , **absurde**.

Quel est l'ordre de  $Z(x)$ ? C'est nécessairement  $p$  ou  $p^2$ , mais dans chacun des cas, on arrive à une contradiction avec les inclusions strictes plus-haut. C'est **absurde**.

## 6 Exercice 6. Troisième théorème d'isomorphisme

Soit  $H$  un groupe et soient  $H$  et  $K$  des sous-groupes tels que  $H \triangleleft G$  et  $H \leq K$ . On notera  $\pi_H : G \rightarrow G/H$ .

1. Montrer que le groupe  $\pi_H(K)$  est distingué dans  $G/H$  si et seulement si  $K$  est distingué dans  $G$ .
2. Justifier que  $H$  est distingué dans  $K$  et que l'on a un isomorphisme  $\pi_H(K) \cong K/H$ .
3. On suppose  $K$  distingué dans  $G$ . On note  $\pi_K : G \rightarrow G/K$  la projection canonique.
  - a) Montrer que  $\pi_K$  induit un unique morphisme de groupes  $\bar{\pi}_K : G/H \rightarrow G/K$  tel que  $\pi_K = \bar{\pi}_K \circ \pi_H$ .
  - b) Montrer que le noyau de  $\bar{\pi}_K$  est  $\pi_H(K) \cong K/H$ .
  - c) En déduire le troisième théorème d'isomorphisme.

1. On procède en deux temps.

Dans un premier temps, supposons que  $K \triangleleft G$  et montrons que l'on a  $\pi_H(K) \triangleleft G/H$ . Soit  $\bar{g} \in G/H$  et soit  $g \in G$  un élément tel que  $\pi_H(g) = \bar{g}$  qui existe par surjectivité de  $\pi_H$ . Alors,

$$\pi_H(K) = \pi_H(gHg^{-1}) = \bar{g} \pi_H(K) \bar{g}^{-1},$$

d'où  $\pi_H(K) \triangleleft G/H$ .

Dans un second temps, supposons

$$\forall \bar{g} \in G/H, \quad \bar{g} \pi_H(K) \bar{g}^{-1} = \pi_H(K).$$

Soit  $g \in G$  et  $k \in K$ , et montrons que  $gkg^{-1} \in K$ . On sait que l'on a  $\bar{g} = gH$  et  $\pi_H(k) = kH$ . Alors,

$$gkg^{-1}H \subseteq (gH)(kH)(g^{-1}H) = k'H \subseteq K,$$

pour un certain  $k' \in K$  (on applique ici l'hypothèse). Ainsi, comme  $e \in H$ , on a en particulier  $gkg^{-1} \in K$ . On en déduit ainsi que  $K \triangleleft G$ .

2. Pour tout  $k \in K$ , on a que  $kHk^{-1} = H$  car  $k \in G$ , on en déduit  $H \triangleleft K$ . Montrons que  $\pi_H(K) \cong K/H$ . On a même égalité de ces deux ensembles si l'on voit  $K/H$  comme l'ensemble des classes à gauches de  $H$ . En effet,

$$\pi_H(k) = kH \quad \text{d'où} \quad \pi_H(K) = \{kH \mid k \in K\},$$

et

$$K/H = \{kH \mid k \in K\}.$$

On a donc l'égalité.

3. a) On factorise par le quotient :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi_K} & G/K \\ & \searrow \pi_H & \nearrow \bar{\pi}_K \\ & & G/H \end{array},$$

qui est possible car  $K = \ker \pi_K \supseteq H$ . Le morphisme  $\bar{\pi}_K : G/H \rightarrow G/K$  est l'unique morphisme faisant commuter le diagramme ci-dessus.

- b) Par construction,

$$\begin{aligned} \ker \bar{\pi}_K &= \{\bar{g} \in G/H \mid \pi_K(g) = K\} \\ &= \{\pi_H(g) \mid g \in \ker \pi_K\} \\ &= \pi_H(\ker \pi_K) = \pi_H(K) \underset{Q_2}{\cong} K/H. \end{aligned}$$

- c) Appliquons le premier théorème d'isomorphisme à  $\bar{\pi}_K$ , qui est surjectif :

$$(G/H)/(\ker \bar{\pi}_K) = (G/H)/\ker \bar{\pi}_K \cong \text{im } \bar{\pi}_K = G/K,$$

c'est le troisième théorème d'isomorphisme.

## 7 Exercice 7. Sous-groupe d'un quotient

Soit  $G$  un groupe, et  $H$  un sous-groupe distingué de  $G$ . On note la projection canonique  $\pi_H : G \rightarrow G/H$ .

1. a) Soit  $K$  un sous-groupe de  $G$ . Montrer  $\pi_H^{-1}(\pi_H(K)) = KH$ .  
 b) En déduire que  $\pi_H$  induit une bijection croissante entre les sous-groupes de  $G/H$  et les sous-groupes de  $G$  contenant  $H$ .
2. Montrer que les sous-groupes distingués de  $G/H$  sont en correspondance avec les sous-groupes distingués de  $G$  contenant  $H$ .
3. Montrer que la correspondance précédente préserve l'indice : si  $K$  est un sous-groupe de  $G$  d'indice fini contenant  $H$ , alors on a  $[G : K] = [G/H, \pi_H(K)]$ .

1. a) On a

$$\begin{aligned}
 \pi_H^{-1}(\pi_H(K)) &= \{g \in G \mid \pi_H(g) \in \pi_H(K)\} \\
 &= \{g \in H \mid gH = kH \text{ avec } k \in K\} \\
 &= \bigcup_{k \in K} kH \\
 &= \{kh \mid k \in K, h \in H\} \\
 &= KH.
 \end{aligned}$$

- b) L'image directe par  $\pi_H$  envoie un sous-groupe de  $G$  contenant  $H$  sur sous-groupe de  $G/H$ . De plus, l'image réciproque par  $\pi_H$  envoie un sous-groupe de  $G/H$  sur un sous-groupe de  $G$  contenant  $H$ . Montrons la bijection puis la croissance.

- ▷ Si  $\pi_H(K_1) = \pi_H(K_2)$  où  $K_1, K_2$  sont deux sous-groupes de  $G$  contenant  $H$  alors

$$K_1 = K_1H = \pi_H^{-1}(\pi_H(K_1)) = \pi_H^{-1}(\pi_H(K_2)) = K_2H = K_2.$$

D'où l'injectivité.

- ▷ On sait déjà que  $\pi_H : G \rightarrow G/H$  est surjective, alors l'image directe  $\tilde{\pi}_H : S_G \rightarrow S_{G/H}$  où  $S_G$  est l'ensemble des sous-groupes de  $G$ .

▷ L'image directe et l'image réciproque par  $\pi_H$  est une application croissante.

2. On procède en deux temps.

▷ Soit  $L \triangleleft G/H$ . Pour tout  $g \in G$  et tout  $x \in \pi_H^{-1}(L)$ , on a

$$\pi_H(gxg^{-1}) = (gxg^{-1})H = (gH)(xH)(gH)^{-1} \in L,$$

car  $L$  est distingué dans  $G/H$ . Ainsi  $xgx^{-1} \in \pi_H^{-1}(L)$  et donc  $\pi_H^{-1}(L)$  est distingué dans  $G$ .

▷ Soit  $K \triangleleft G$  un sous-groupe distingué contenant  $H$ . Pour tout  $xH \in G/H$  et tout  $kH \in \pi_H(K)$  avec  $k \in K$ , on a

$$(xH)(kH)(xH)^{-1} = (xkx^{-1})H.$$

Comme  $K \triangleleft G$ , on a  $xkx^{-1} \in K$  d'où  $(xkx^{-1})H \in \pi_H(K)$ . On en déduit que  $\pi_H(K)$  est distingué dans le groupe quotient  $G/H$ .

3.

## 8 Exercice 8. Combinatoire algébrique

Soit  $\mathbb{k}$  un corps fini à  $q$  éléments et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On définit  $\text{PGL}_n(\mathbb{k})$  comme le quotient  $\text{GL}_n(\mathbb{k})/\mathbb{k}^\times$ , où  $\mathbb{k}^\times$  correspond au sous-groupe distingué formé de la forme  $\lambda I_n$  avec  $\lambda \in \mathbb{k} \setminus \{0\}$ . On considère l'action de  $\text{GL}_n(\mathbb{k})$  sur l'ensemble des droites vectorielles de  $\mathbb{k}^n$ .

1. Déterminer le cardinal des groupes finis  $\text{GL}_n(\mathbb{k})$ ,  $\text{SL}_n(\mathbb{k})$  et  $\text{PGL}_n(\mathbb{k})$ .  
Indication : compter les bases de  $\mathbb{k}^n$ .

2. On prend désormais  $n = 2$ .

a) Montrer que le nombre de droites vectorielles de  $\mathbb{k}^2$  est égal à  $q + 1$ .

b) En déduire qu'il existe un morphisme de groupes injectif

$$\text{PGL}_2(\mathbb{k}) \hookrightarrow \mathfrak{S}_{q+1}.$$

3. Montrer que  $\text{GL}_2(\mathbb{F}_2) = \text{SL}_2(\mathbb{F}_2) = \text{PGL}_2(\mathbb{F}_2) \cong \mathfrak{S}_3$ .

4. Montrer que  $\text{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \cong \mathfrak{S}_4$ .

## 1. L'application

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(\mathbb{k}) &\longrightarrow \{\text{bases de } \mathbb{k}^n\} \\ (C_1 \ C_2 \ \cdots \ C_n) &\longmapsto (C_1, \dots, C_n) \end{aligned}$$

est une bijection. Construisons une base de  $\mathbb{k}^n$  :

- (1) On choisit le premier vecteur  $C_1$  dans  $\mathbb{k}^n \setminus \{0\}$ , on a donc  $q^n - 1$  choix.
- (2) On choisit le second vecteur  $C_2$  dans  $\mathbb{k}^n \setminus \text{vect}(C_1)$ , on a donc  $q^n - q$  choix.
- (3) On choisit le troisième vecteur  $C_3$  dans  $\mathbb{k}^n \setminus \text{vect}(C_1, C_2)$ , on a donc  $q^n - q^2$  choix.
- (4) *Et cetera.*

D'où,

$$\#\mathrm{GL}_n(\mathbb{k}) = \prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i).$$

L'application  $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{k}) \rightarrow \mathbb{k}^\times$  est un morphisme de groupes surjectif. De plus,  $\ker \det = \mathrm{SL}_n(\mathbb{k})$ . On a ainsi, par le premier théorème d'isomorphisme,

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{k})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{k}) \cong \mathbb{k}^\times.$$

Ainsi,

$$\#\mathrm{SL}_n(\mathbb{k}) = \frac{\#\mathrm{GL}_n(\mathbb{k})}{\#\mathbb{k}^\times} = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i)}{q - 1}.$$

Finalement, on a  $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{k}) := \mathrm{GL}_n(\mathbb{k})/\mathbb{k}^\times$  d'où

$$\#\mathrm{PGL}_n(\mathbb{k}) = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i)}{q - 1}.$$

## 2. a)

## 9 Exercice 9. Formule de Burnside

Soit  $G$  un groupe fini agissant sur un ensemble fini  $X$ . On note  $N$  le nombre d'orbites de l'action.

1. Soit  $Y := \{(g, x) \in G \times X \mid g \cdot x = x\}$ . Interpréter le cardinal de  $Y$  comme somme sur les éléments de  $X$  d'une part, et de  $G$  d'autre part.
2. En décomposant  $X$  en union d'orbites, montrer la formule de BURNSIDE :

$$N = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \#\text{Fix}(G).$$

3. Soit  $n$  un entier. Quel est le nombre moyen de points fixes des éléments de  $\mathfrak{S}_n$  pour l'action naturelle sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .
4. On suppose que  $G$  agit transitivement sur  $X$  et que  $X$  contient au moins deux éléments. Montrer qu'il existe un  $g \in G$  agissant sans point fixe.
5. En déduire qu'un groupe fini n'est jamais l'union des conjugués d'un sous-groupe strict.

## 10 Exercice 10. Automorphismes intérieurs.

Soit  $G$  un groupe. Pour  $g \in G$ , on note  $\phi_g : G \rightarrow G$  la fonction définie par  $h \mapsto ghg^{-1}$ . On note  $\text{Int}(G)$  l'ensemble des  $\phi_g$  pour  $g \in G$ .

1. Soit  $g \in G$ , montrer que  $\phi_g$  est un automorphisme de groupes.
2. Montrer que la fonction  $\phi : G \rightarrow \text{Int}(G)$  qui à  $g$  associe  $\phi_g$  est un morphisme de groupes.
3. Montrer l'isomorphisme  $G/Z(G) \cong \text{Int}(G)$  où  $Z(G)$  est le centre du groupe  $G$ .
4. (Plus difficile) Montrer que si le groupe des automorphismes  $\text{Aut}(G)$  de  $G$  est cyclique alors  $G$  est abélien.
5. (Aussi difficile) Supposons que  $\text{Aut}(G)$  est trivial. Démontrer que tous les éléments de  $G$  sont d'ordre au plus 2, puis que  $G$  est soit trivial, soit isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

## 11 Exercice 11.

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On note  $\wp_k(\llbracket 1, n \rrbracket)$  l'ensemble des parties à  $k$  éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

1. Montrer que  $\mathfrak{S}_n$  agit naturellement sur  $\wp_k(\llbracket 1, n \rrbracket)$ .
2. Justifier que cette action est transitive.
3. Calculer le stabilisateur de  $\llbracket 1, k \rrbracket \in \wp_k(\llbracket 1, n \rrbracket)$ .
4. En appliquant la formule orbite-stabilisateur, retrouver la valeur de  $\binom{n}{k}$ .

1. Posons l'action de groupes :

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \forall i \in \wp_k(\llbracket 1, n \rrbracket), \quad \sigma \cdot I = \sigma(I) = \{\sigma(i) \mid i \in I\}.$$

La partie  $\sigma(I)$  contient  $k$  éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Et, de plus, l'application  $\sigma \mapsto (I \mapsto \sigma(I))$  est

# Table des matières

	<b>Théorèmes d'isomorphismes et actions de groupes.</b>	<b>1</b>
1	Exercice 1. <i>Groupes monogènes</i> . . . . .	1
2	Exercice 2. . . . .	1
3	Exercice 3. . . . .	3
4	Exercice 4. . . . .	3
5	Exercice 5. . . . .	4
6	Exercice 6. <i>Troisième théorème d'isomorphisme</i> . . . . .	5
7	Exercice 7. <i>Sous-groupe d'un quotient</i> . . . . .	7
8	Exercice 8. <i>Combinatoire algébrique</i> . . . . .	8
9	Exercice 9. <i>Formule de BURNSIDE</i> . . . . .	10
10	Exercice 10. <i>Automorphismes intérieurs</i> . . . . .	10
11	Exercice 11. . . . .	11