

Relations d'équivalence, quotients, premières propriétés des groupes.

1 Exercice 1.

1. Donner un isomorphisme $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{S}^1$, où \mathbb{S}^1 est le cercle unité de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}/\mathbb{Z} est le groupe quotient de \mathbb{R} par son sous-groupe distingué \mathbb{Z} .

Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \rightarrow F$ une application.

2. a) Montrer que la relation binaire sur E définie par

$$x \sim y \iff f(x) = f(y)$$

est une relation d'équivalence.

- b) On pose $X := E/\sim$. Soit $\pi : E \rightarrow X$ l'application canonique. Montrer qu'il existe une unique application $\bar{f} : X \rightarrow F$ telle que $f = \bar{f} \circ \pi$.
- c) Montrer que \bar{f} est une bijection sur son image.

1. On commence par considérer l'application

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\longrightarrow u^{-1}(\mathbb{S}^1) \\ x\mathbb{Z} &\longmapsto e^{2\pi i x}, \end{aligned}$$

où $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ est l'isomorphisme canonique de \mathbb{R}^2 et \mathbb{C} . Montrons trois propriétés.

- ▷ C'est bien défini. En effet, si $k \in \mathbb{Z}$, alors $e^{2i\pi(x+k)} = e^{2i\pi x}$ par la 2π -périodicité de \cos et \sin .
- ▷ C'est bien un morphisme. En effet, si $x\mathbb{Z}, y\mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, alors on a

$$\begin{aligned} g(x\mathbb{Z} + y\mathbb{Z}) &= g((x + y)\mathbb{Z}) = \exp(2i\pi(x + y)) \\ &= \exp(2i\pi x) \cdot \exp(2i\pi y) \\ &= g(x\mathbb{Z}) \cdot g(y\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

- ▷ C'est une bijection. En effet, l'application réciproque est l'application $u^{-1}(\mathbb{S}^1) \ni z \mapsto (\arg z)\mathbb{Z}$.

On en conclut en posant l'isomorphisme $f := u \circ g : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{S}^1$.

2. a) On a trois propriétés à vérifier.

- ▷ Comme $f(x) = f(x)$, on a $x \sim x$ quel que soit $x \in E$.
- ▷ Si $x \sim y$, alors $f(x) = f(y)$ et donc $f(y) = f(x)$ et on en déduit $y \sim x$.
- ▷ Si $x \sim y$ et $y \sim z$, alors $f(x) = f(y) = f(z)$, et on a donc $x \sim z$.

b) La fonction f est constante sur chaque classe d'équivalence de E par \sim . On procède par analyse synthèse.

- ▷ *Analyse.* Si $\bar{f} : X \rightarrow F$ existe, alors $\bar{f}(\bar{x}) = f(x)$ quel que soit $x \in E$, où \bar{x} est la classe d'équivalence de x . L'application \bar{f} est donc unique, car déterminée uniquement par les valeurs de f sur les classes d'équivalences de x .
- ▷ *Synthèse.* On pose $\bar{f}(\bar{x}) := f(x)$, qui est bien définie car f est constante sur les classes d'équivalences de \sim .

c) Montrons que $\bar{f} : X \rightarrow \text{im } \bar{f}$ est injective et surjective.

- ▷ Soient \bar{x} et \bar{y} dans X tels que $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{y})$. Alors, on a $f(x) = f(y)$ et donc $x \sim y$ d'où $\bar{x} = \bar{y}$.
- ▷ On a, par définition, $\text{im } \bar{f} = \bar{f}(X)$.

D'où, \bar{f} est une bijection sur son image.

2 Exercice 2. Parties génératrices

1. Soit X une partie non vide d'un groupe G . Montrer que $\langle X \rangle$, le sous-groupe de G engendré par X , est exactement l'ensemble des produits finis d'éléments de $X \cup X^{-1}$, où X^{-1} est l'ensemble défini par $X^{-1} := \{x^{-1} \mid x \in X\}$.
2. Montrer que le groupe $(\mathbb{Q}, +)$ n'admet pas de partie génératrice finie.
3. Montrer que $(\mathbb{Q}^\times, \times) = \langle -1, p \in \mathbb{P} \rangle$, où \mathbb{P} est l'ensemble des nombres premiers.

1. Soit H l'ensemble des produits finis d'éléments de $X \cup X^{-1}$.
 - ▷ L'ensemble H contient X . De plus, H est un groupe. En effet, on a $H \neq \emptyset$ car $e = xx^{-1} \in H$ où $x \in X$. Puis, pour deux produits $x = x_1 \cdots x_n \in H$ et $y = y_1 \cdots y_m \in H$ (où les x_i et les y_j sont des éléments de $X \cup X^{-1}$) on a

$$xy^{-1} = x_1 \cdots x_n y_m^{-1} \cdots y_1^{-1},$$

qui est un produit fini d'éléments de $X \cup X^{-1}$, c'est donc un élément de H . On en conclut que H est un sous-groupe de G contenant X . D'où $H \geq \langle X \rangle$.

- ▷ Soit K un sous-groupe de G contenant X . D'une part, on sait que $X \cup X^{-1} \subseteq K$. D'autre part, si $x = x_1 \cdots x_n$ où l'on a $x_i \in X \cup X^{-1} \subseteq K$, alors $x \in K$ car K est un groupe. On en déduit que $H \leq K$.

Ainsi, H est le plus petit sous-groupe de G contenant X , il est donc égal à $\langle X \rangle$.

2. Supposons, par l'absurde, que $(\mathbb{Q}, +) = \langle \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_n}{q_n} \rangle$. On pose $Q := \prod_{i=1}^n q_i$, puis on considère $\frac{1}{Q+1} \in \mathbb{Q}$.

Montrons que l'on peut écrire tout élément de $\langle \frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n} \rangle$ sous la forme $\frac{p}{Q}$. En effet, par la question 1, on considère

$$x := \sum_{i \in I} \varepsilon_i \frac{p_i}{q_i} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_i \in \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad I \text{ fini,}$$

un élément quelconque du sous-groupe engendré. Et, en mettant au même dénominateur, on obtient $p' / \prod_{i \in I} q_i = x$. On obtient donc bien

$$x = \frac{p' \times \prod_{i \notin I} p_i}{Q},$$

où le produit au numérateur contient un nombre fini de termes.

Or, $\frac{1}{Q+1} \in \mathbb{Q}$ ne peut pas être écrit sous la forme p/Q car $Q + 1$ et Q sont premiers entre eux. C'est donc absurde ! On en conclut que $(\mathbb{Q}, +)$ n'admet pas de partie génératrice finie.

3. Notons $E := \langle -1, p \in \mathbb{P} \rangle$. Soit $\frac{a}{b}$ un rationnel strictement positif. On suppose a et b positifs. On décompose a et b en produit de nombre premiers :

$$a = \prod_{i \in I} p_i \quad \text{et} \quad b = \prod_{j \in J} p_j.$$

On a donc $a \in E$ et $b \in E$. On en conclut que $\frac{a}{b} \in E$.

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^\times$ est un rationnel tel que $a, b < 0$, on a $\frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|} \in E$ d'après ce qui précède.

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^\times$ est un rationnel négatif, alors on a $|\frac{a}{b}| \in E$, mais on a donc également $\frac{a}{b} = (-1) \times |\frac{a}{b}| \in E$.

On en conclut que $\mathbb{Q}^\times \subseteq E$ et on a égalité car $E \subseteq \mathbb{Q}^\times$ par définition de E comme sous-groupe de \mathbb{Q}^\times .

3 Exercice 3. *Ordre des éléments d'un groupe*

Soient g et h deux éléments d'un groupe G .

1. a) Montrer que g est d'ordre fini si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^n = e$.
 b) Montrer que si g est d'ordre fini, alors son ordre est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^n = e$. Montrer, de plus, que pour $m \in \mathbb{Z}$, $g^m = e$ si et seulement si l'ordre de g divise m .
2. Montrer que les éléments g , g^{-1} et hgh^{-1} ont même ordre.

3. Montrer que gh et hg ont même ordre.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer l'ordre de g^n en fonction de celui de g .
5. On suppose que g et h commutent et sont d'ordre fini m et n respectivement.

- a) Exprimer l'ordre de gh lorsque $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle = \{e\}$.
- b) Même question lorsque m et n sont premiers entre eux.
- c) (Plus difficile) On prend m et n quelconques. Soient $a := \min\{\ell \in \mathbb{N}^* \mid g^\ell \in \langle h \rangle\}$ et $b \in \mathbb{N}$ tel que $g^a = h^b$. Démontrer que l'ordre de gh est $an/\text{pgcd}(n, (a + b))$.

6. En considérant

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

montrer que le produit de deux éléments d'ordre fini ne l'est pas forcément.

1. On rappelle que l'ordre de g est défini comme $\#\langle g \rangle$. On le note naturellement $\text{ord } g$.

- a) On procède par double implication.
 - ▷ Si g est d'ordre fini, alors $\langle g \rangle$ est fini et donc l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z} &\longrightarrow \langle g \rangle \\ n &\longmapsto g^n \end{aligned}$$

est un morphisme non injectif. Il existe donc un entier non nul $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tel que $n \in \ker \varphi$, i.e. $g^n = e$.

- ▷ Si $g^n = e$ alors $\langle g \rangle = \{g^i \mid i \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket\}$, qui est fini. Ainsi g est d'ordre fini.

- b) Si g est d'ordre fini, alors le morphisme φ (défini ci-avant) est surjectif et non injectif. Soit $p = \min(\ker \varphi \cap \mathbb{N}^*)$. Alors les g^i pour $i \in \llbracket 0, p - 1 \rrbracket$ sont distincts et constituent $\langle g \rangle$.

Si $n \in \mathbb{Z}$ est tel que $g^n = e$. On écrit $n = q \times (\text{ord } g) + r$ la division euclidienne de n par $\text{ord } g$, avec $0 \leq r < \text{ord } g$. Et,

$$e = g^n = (g^{\text{ord } g})^q g^r = g^r,$$

d'où $g^r = e$. On en déduit que $r = 0$ et donc $\text{ord } g$ divise n .

2. D'une part, $\langle g \rangle = \langle g^{-1} \rangle$, d'où $\text{ord } g = \text{ord } g^{-1}$. D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $(hgh^{-1})^n = hg^n h^{-1}$, et donc l'équivalence

$$g^n = e \iff (hgh^{-1})^n = e,$$

d'où $\text{ord } g = \text{ord}(hgh^{-1})$.

3. On a $hg = h(gh)h^{-1}$ et par la question précédente, on a que $\text{ord}(hg) = \text{ord}(gh)$.
4. On a

$$\begin{aligned} \text{ord } g^n &= \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid g^{nk} = e\} \\ &= \frac{1}{n} \min((\text{ord } g)\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}^*) \\ &= \frac{\text{ppcm}(\text{ord } g, n)}{n} \\ &= \frac{\text{ord } g}{\text{pgcd}(\text{ord } g, n)}. \end{aligned}$$

5. a) Si $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle = \{e\}$ et $(gh)^k = e$ alors $g^k = h^{-k} \in \langle g \rangle \cap \langle h \rangle$. D'où, $g^k = h^{-k} = e$.

4 Exercice 4.

Soit G un groupe.

1. On suppose que tout élément g de G est d'ordre au plus 2. Montrer que G est commutatif.
2. Montrer que G est commutatif si et seulement si l'application $g \mapsto g^{-1}$ est un morphisme de groupes.
1. Pour tout $g \in G$, on a $g^2 = e$. Ainsi, pour tout $g \in G$, on a g est son propre inverse. Ceci permet de calculer

$$gh = g^{-1}h = g^{-1}h^{-1} = (hg)^{-1} = hg,$$

d'où G est commutatif.

2. On note $\phi : g \mapsto g^{-1}$, et on procède par équivalence.

$$\begin{aligned}
 G \text{ est commutatif} &\iff \forall g, h \in G, \quad gh = hg \\
 &\iff \forall g, h \in G, \quad (gh)^{-1} = (hg)^{-1} \\
 &\iff \forall g, h \in G, \quad (gh)^{-1} = g^{-1}h^{-1} \\
 &\iff \forall g, h \in G, \quad \phi(gh) = \phi(g)\phi(h) \\
 &\iff \phi \text{ est un morphisme.}
 \end{aligned}$$

5 Exercice 5.

Soit $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ un morphisme de groupes, et soit $g \in G_1$ d'ordre fini. Montrer que $\phi(g)$ est d'ordre fini et que son ordre divise l'ordre de g .

On utilise habilement l'exercice 3 : pour tout $h \in G$, $h^m = e$ si et seulement si l'ordre de h divise m . Soit n l'ordre de g (qui est fini car G_1 d'ordre fini). Ainsi,

$$(\phi(g))^n = \phi(g^n) = \phi(e_1) = e_2.$$

On en déduit donc que $\phi(g)$ est d'ordre fini et qu'il divise $n = \text{ord } g$.

6 Exercice 6.

Soient G_1 et G_2 des groupes, et $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ un morphisme de groupes.

1. Soient H_1 (resp. H_2) un sous-groupe de G_1 (resp. G_2). Montrer que $\phi(H_1)$ (resp. $\phi^{-1}(H_2)$) est un sous-groupe de G_2 (resp. G_1).
2. Montrer que H_2 est un sous-groupe distingué de G_2 , alors $\phi^{-1}(H_2)$ est un sous-groupe distingué de G_1 .
3. Montrer que si ϕ est surjective, l'image d'un sous-groupe distingué de G_1 par ϕ est un sous-groupe distingué de G_2 .
4. Donner un exemple d'un morphisme de groupes $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ et de sous-groupe distingué $H_1 \triangleleft G_1$ tel que $\phi(H_1)$ n'est pas distingué dans G_2 .

1. Remarquons que $e_2 \in \phi(H_1) \neq \emptyset$ et que $e_1 \in \phi^{-1}(H_2) \neq \emptyset$ car on a $\phi(e_1) = e_2$. Pour $a, b \in \phi(H_1)$, on sait qu'il existe $x, y \in H_1$ tels que $\phi(x) = a$ et $\phi(y) = b$. Alors,

$$ab^{-1} = \phi(x) \phi(y)^{-1} = \underbrace{\phi(xy^{-1})}_{\in H_1} \in \phi(H_1),$$

d'où $\phi(H_1)$ est un sous-groupe de G_2 . Pour $a, b \in \phi^{-1}(H_2)$, on sait que $\phi(a), \phi(b) \in H_2$. Alors, on a

$$\phi(ab^{-1}) = \underbrace{\phi(a)}_{\in H_2} \underbrace{\phi(b)^{-1}}_{\in H_2} \in H_2,$$

d'où $ab^{-1} \in \phi^{-1}(H_2)$ et donc $\phi(H_1)$ est un sous-groupe de G_2 .

2. Supposons $H_2 \triangleleft G_2$ et montrons que $\phi^{-1}(H_2) \triangleleft G_2$. Soit un élément $g \in G_1$ quelconque, et soit $h \in \phi^{-1}(H_2)$. Alors,

$$\phi(ghg^{-1}) = \phi(g) \phi(h) \phi(g)^{-1} \in H_2,$$

car $\phi(h) \in H_2$ et que $H_2 \triangleleft G_2$. Ainsi, $ghg^{-1} \in \phi^{-1}(H_2)$. On a donc $g \phi^{-1}(H_2) g^{-1} \subseteq \phi^{-1}(H_2)$, quel que soit $g \in G_1$. On en déduit que $\phi^{-1}(H_2)$ est distingué dans G_1 .

3. Supposons ϕ surjective, on a donc l'égalité $\phi(G_1) = G_2$. Supposons de plus que $H_1 \triangleleft G_1$. Montrons que $\phi(H_1)$ est un sous-groupe distingué de G_2 . Soit $g \in G_2 = \phi(G_1)$ quelconque, et soit un élément $h \in \phi(H_1)$. Il existe donc $x \in G_1$ et $y \in H_1$ deux éléments tels que $\phi(y) = h$ et $\phi(x) = g$. Ainsi

$$ghg^{-1} = \phi(x) \phi(y) \phi(x)^{-1} = \phi(xyx^{-1}) \in \phi(H_1)$$

car H_1 distingué dans G_1 et donc $xyx^{-1} \in H_1$. Ainsi $\phi(H_1) \triangleleft G_2$.

4. On considère le morphisme

$$f : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$$

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et le sous-groupe distingué $\mathbb{R} \triangleleft \mathbb{R}$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M \in \text{GL}_2(\mathbb{R})} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{f(x)} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M^{-1} \in \text{GL}_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \notin f(\mathbb{R}).$$

Ainsi, $f(\mathbb{R}) \not\subseteq \text{GL}_2(\mathbb{R})$.

7 Exercice 7.

Soit G un groupe et soient H, K deux sous-groupes de G . Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si on a $H \subseteq K$ ou $K \subseteq H$.

On procède par double implications.

- ▷ « \implies ». Supposons que $H \cup K$ soit un sous-groupe de G . Par l'absurde, supposons que $H \not\subseteq K$ et $K \not\subseteq H$. Il existe donc deux éléments $h \in H \setminus K$ et $k \in K \setminus H$. Considérons $hk \in H \cup K$.
 - Si $hk \in H$, alors $h^{-1}(hk) \in H$ et donc $k \in H$, *absurde!*
 - Si $hk \in K$, alors $(hk)k^{-1} \in K$ et donc $h \in K$, *absurde!*

On en déduit que $H \subseteq K$ ou $K \subseteq H$.

- ▷ « \impliedby ». Sans perte de généralité, supposons $H \subseteq K$. Ainsi, on a $H \cup K = K$ qui est un sous-groupe de G .

8 Exercice 8. Classes à gauche et classes à droite

Soit H un sous-groupe d'un groupe G . Montrer que l'on a une bijection canonique $G/H \rightarrow H \backslash G$.

On note $S^{-1} = \{s^{-1} \mid s \in S\}$ pour un sous-ensemble S de G . Alors

nous avons l'égalité $(aH)^{-1} = Ha^{-1}$ et $(Ha)^{-1} = a^{-1}H$. En effet,

$$\begin{aligned}
 (aH)^{-1} &= \{ah \mid h \in H\}^{-1} & (Ha)^{-1} &= \{ha \mid h \in H\}^{-1} \\
 &= \{(ah)^{-1} \mid h \in H\} & &= \{(ha)^{-1} \mid h \in H\} \\
 &= \{h^{-1}a^{-1} \mid h \in H\} & &= \{a^{-1}h^{-1} \mid h \in H\} \\
 &= \{ha^{-1} \mid h \in H\} & &= \{a^{-1}h \mid h \in H\} \\
 &= Ha^{-1} & &= a^{-1}H.
 \end{aligned}$$

Il existe donc une bijection canonique

$$\begin{aligned}
 f : G/H &\longrightarrow H \backslash G \\
 aH &\longmapsto (aH)^{-1} = Ha^{-1}.
 \end{aligned}$$

9 Exercice 9. Normalisateur

Soit $H \leq G$ un sous-groupe d'un groupe G . On dit que x normalise si $xHx^{-1} = H$. On note $N_G(H)$ l'ensemble des éléments de G qui normalisent H . C'est le normalisateur de H dans G .

1. Montrer que $N_G(H)$ est le plus grand sous-groupe de G contenant H et dans lequel H est distingué.
2. En déduire que H est distingué dans G si et seulement si on a l'égalité $G = N_G(H)$.
1. Commençons par montrer que $N_G(H)$ est un sous-groupe de G contenant H .

- ▷ L'élément neutre normalise H , car $eHe^{-1} = H$. D'où, le normalisateur de H est non vide.
- ▷ Soient x et y deux éléments qui normalisent H . Alors, xy normalise H :

$$(xy)H(xy)^{-1} = xyHy^{-1}x^{-1} = xHx^{-1} = H.$$

- ▷ Soit $x \in G$ qui normalise H . Alors x^{-1} normalise H :

$$x^{-1}Hx = H \iff Hx = xH \iff H = xHx^{-1},$$

et cette dernière condition est vérifiée car x normalise H .

▷ Soit $h \in H$. Alors h normalise H . En effet,

$$hHh^{-1} = Hh^{-1} = H,$$

car $h^{-1} \in H$ et puis car $h \in H$.

On en conclut que $N_G(H)$ est un sous-groupe de G contenant H .

Par définition de $N_G(H)$, on a que $H \triangleleft N_G(H)$: quel que soit x qui normalise H , on a (par définition) $xHx^{-1} = H$.

Il ne reste plus qu'à montrer que tout sous-groupe $N \supseteq H$ tel que $H \triangleleft N$ vérifie $N \subseteq N_G(H)$. Soit N un tel sous-groupe, et un élément $x \in N$. Ainsi $xHx^{-1} = H$, d'où x normalise H . On a donc bien l'inclusion $N \subseteq N_G(H)$.

Ceci démontre bien que $N_G(H)$ est le plus grand sous-groupe de G contenant H et dans lequel H y est distingué.

2. D'une part, si H est distingué dans G , alors le plus grand sous-groupe de G contenant H et dans lequel H est distingué est G .

D'autre part, si $G = N_G(H)$, alors tout élément $x \in G$ vérifie l'égalité $xHx^{-1} = H$ et donc $H \triangleleft G$.

10 Exercice 10. Construction de \mathbb{Q}

Soit $E := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. On définit \sim sur E par $(a, b) \sim (a', b')$ dès lors que $ab' = a'b$.

1. Montrer que \sim est un relation d'équivalence sur E . Si $(a, b) \in E$, on note $\frac{a}{b}$ son image dans E/\sim .
2. Munir E/\sim d'une structure de corps telle que \mathbb{Z} s'injecte dans le corps E/\sim .
3. Similairement, pour un corps \mathbb{k} , construire $\mathbb{k}(X)$ à partir de l'ensemble $\mathbb{k}[X]$.
4. Construire \mathbb{Z} à partir de \mathbb{N} .

1. On a trois propriétés à vérifier.

▷ Si $(a, b) \in E$, alors $ab = ab$ donc $(a, b) \sim (a, b)$.

▷ Si $(a, b) \sim (a', b')$, alors $ab' = a'b$ et donc $(a', b') \sim (a, b)$.

- ▷ Si $(a, b) \sim (a', b')$ et $(a', b') \sim (a'', b'')$, alors

$$a'ab'b'' = a'a'bb'' = a'ba'b'' = a'ba''b',$$

et donc $a'b'(ab'' - a''b) = 0$. Par anneau intègre, on a une disjonction de cas :

- si $a' = 0$, alors $a = a'' = 0$;
- si $b' = 0$, alors **absurde** car $b' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;
- si $ab'' - a''b = 0$, alors on a $ab'' = a''b$.

Dans les deux cas, on obtient bien $(a, b) \sim (a'', b'')$.

2. On munit E/\sim de deux opérations « \oplus » et « \otimes ».

- ▷ On pose l'opération $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} := \frac{ad+bc}{bd}$ qui est bien définie car, si l'on a $(a, b) \sim (a', b')$, alors

$$\begin{aligned} (ad + bc, bd) \sim (a'd + b'c, b'd) &\iff (ad + bc)b'd = (a'd + b'c)bd \\ &\iff ab'd^2 = a'bd^2, \end{aligned}$$

ce qui est vrai car $(a, b) \sim (a', b')$. On peut procéder symétriquement pour $(c', d') \sim (c, d)$.

- ▷ On pose l'opération $\frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}$ qui est bien définie car, si l'on a $(a, b) \sim (a', b')$, alors

$$(ac, bd) \sim (a'c, b'd) \iff acb'd = a'cbd,$$

ce qui est vrai car $(a, b) \sim (a', b')$. On peut procéder symétriquement pour $(c', d') \sim (c, d)$.

Montrons que $(E/\sim, \oplus, \otimes)$ est un corps.

- ▷ La loi \oplus est associative : on a

$$\frac{a}{b} \oplus \left(\frac{c}{d} \oplus \frac{e}{f} \right) = \left(\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} \right) \oplus \frac{e}{f} = \frac{adf+cbf+ebd}{bdf},$$

par associativité de $+$.

- ▷ La loi \oplus est commutative par commutativité de $+$.
- ▷ La loi \oplus possède un élément neutre $\frac{0}{1} \in E/\sim$.
- ▷ Tout élément $\frac{a}{b}$ possède un symétrique $(\frac{-a}{b})$ pour \oplus par rapport à $\frac{0}{1}$.

▷ La loi \otimes est associative : on a

$$\frac{a}{b} \otimes \left(\frac{c}{d} \otimes \frac{e}{f} \right) = \left(\frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d} \right) \otimes \frac{e}{f} = \frac{ace}{bdf},$$

par associativité de \times .

▷ La loi \otimes est distributive par rapport à \oplus , par distributivité de \times par rapport à $+$.

▷ La loi \otimes possède un élément neutre $\frac{1}{1} \in E/\sim$ pour \otimes .

▷ Tout élément non nul $\frac{a}{b}$ possède un inverse $\frac{b}{a}$ par rapport à $\frac{1}{1}$.

On en conclut que $(E/\sim, \oplus, \otimes)$ est un corps.

Finalement, on considère l'injection

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\hookrightarrow E/\sim \\ k &\longmapsto \frac{k}{1}. \end{aligned}$$

C'est bien une injection car, si $\frac{k}{1} = \frac{k'}{1}$, alors $k \times 1 = k' \times 1$ et donc $k = k'$. On a, de plus, que f est un morphisme de groupes $(\mathbb{Z}, +) \rightarrow (E/\sim, \oplus)$:

$$f(k) \oplus f(k') = \frac{k}{1} \oplus \frac{k'}{1} = \frac{k+k'}{1} = f(k+k').$$

3. On pose $F := \mathbb{k}[X] \times (\mathbb{k}[X] \setminus \{0_{\mathbb{k}[X]}\})$, et la relation

$$(P, Q) \sim (P', Q') \iff PQ' = P'Q.$$

Cette relation est une relation d'équivalences (comme pour la question précédente, et car \mathbb{k} est un anneau intègre). On pose ensuite $\mathbb{k}(X) := F/\sim$. Comme dans la question précédente, on peut donner une structure de corps avec les mêmes définitions (en remplaçant les entiers par des polynômes de \mathbb{k}). Les propriétés découlent toutes du fait que $(\mathbb{k}, +, \times)$ est un corps.

4. On pose $Z := \mathbb{N}^2/\sim$, où la relation d'équivalence \sim est définie par

$$(a, b) \sim (a', b') \iff a + b' = b + a'.$$

11 Exercice 11.

Soit $E := \mathbb{C}[X]$ le \mathbb{C} -espace vectoriel des polynômes à coefficients dans \mathbb{C} et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $d \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'ensemble $(P) := \{QP \mid Q \in \mathbb{C}[X]\}$ est un sous- \mathbb{C} -espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.
2. Déterminer un isomorphisme entre $\mathbb{C}[X]/(P)$ et le \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathbb{C}_{d-1}[X]$ des polynômes de degrés inférieurs à $d - 1$ de $\mathbb{C}[X]$.
3. Montrer que la multiplication dans $\mathbb{C}[X]$ induit une structure de \mathbb{C} -algèbre sur $\mathbb{C}[X]/(P)$.

12 Exercice 12.

Soit G un groupe et H un sous-groupe strict de G . Montrer que l'on a l'égalité $\langle G \setminus H \rangle = G$.

13 Exercice 13.

Soit G un groupe fini. Montrer que G contient un élément d'ordre 2 si et seulement si son cardinal est pair. Montrer de plus que, dans ce cas là, il en contient un nombre impair.

14 Exercice 14.

Soit G un groupe et \sim une relation d'équivalence sur G . On suppose que G/\sim est un groupe, et que la projection canonique $\pi : G \rightarrow G/\sim$ est un morphisme de groupes.

Montrer qu'il existe un sous-groupe distingué $H \triangleleft G$ tel que pour tous éléments $x, y \in G$, $x \sim y$ si et seulement si $xy^{-1} \in H$.

15 Exercice 15.

Soit G un groupe et S_G l'ensemble des sous-groupes de G .

1. Démontrer que si G est fini, alors S_G est fini.
2. Supposons S_G fini. Démontrer que tous les éléments de G sont d'ordre fini, en déduire que G est fini.
3. On ne suppose plus que S_G est fini. Si tous les éléments de G sont d'ordre fini, est-ce que G est fini ?

Table des matières

Relations d'équivalence, quotients, premières propriétés des groupes.		1
1	Exercice 1.	1
2	Exercice 2. <i>Parties génératrices</i>	3
3	Exercice 3. <i>Ordre des éléments d'un groupe</i>	4
4	Exercice 4.	6
5	Exercice 5.	7
6	Exercice 6.	7
7	Exercice 7.	9
8	Exercice 8. <i>Classes à gauche et classes à droite</i>	9
9	Exercice 9. <i>Normalisateur</i>	10
10	Exercice 10. <i>Construction de \mathbb{Q}</i>	11
11	Exercice 11.	14
12	Exercice 12.	14
13	Exercice 13.	14
14	Exercice 14.	14
15	Exercice 15.	15