TP n°4

Optimisation avec contraintes

MATHS – S 5

I. Optimisation linéaire

Dans cette section, on résout le problème de minimisation :

$$\min_{\boldsymbol{x} \in K \subset \mathbb{R}^n} J(\boldsymbol{x}),$$

où K est l'ensemble des contraintes, exprimé sous forme des trois conditions suivantes :
- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$,
- $\boldsymbol{A}_{\text{éq}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_{\text{éq}}$,
- et, $\mathbf{lb} \leq \boldsymbol{x} \leq \mathbf{ub}$.

I.1. Premier problème de logistique

Dans un un premier temps, on résout un problème de logistique. Un fermier veut maximiser ses revenus en optimisant la composition de ses plantations, en ajoutant une contrainte de superficie de plantation totale, de poids de fertilisant maximal, et de coût maximal. On modélise le problème sous la forme suivante :

$$\min_{\boldsymbol{x} \in K} J(\boldsymbol{x}),$$

où $J(x_1, x_2, x_3) = 155x_1 + 160x_2 + 150x_3$, et les contraintes sont
- $x_1 + x_2 + x_3 = 12$,
- $16x_1 + 13x_2 + 17x_3 \leq 180$,
- $270x_1 + 150x_2 + 110x_3 \leq 1600$,
- et, $0 \leq x_1, x_2, x_3$.

On représente matriciellement les contraintes en posant :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 16 & 13 & 17 \\ 270 & 150 & 110 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 180 \\ 1600 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{\text{éq}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_{\text{éq}} = (12),$$

et

$$\mathbf{lb} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On résout ce problème à l'aide de la fonction Matlab `linprog` du module `optimization`, qui permet de trouver un minimum. En utilisant cette fonction, on trouve la répartition optimale des plantations : 7 ha de tournesol, 5 ha de pois, et aucune plantation de colza. Le revenu maximal est de 1 870 €.

La minimisation a eu lieu en 6 itérations. Une des deux contraintes est active—celle sur le coût— et l'autre est inactive—celle sur la quantité de fertilisant. La contrainte active correspond à l'égalité :

$$16x_1 + 13x_2 + 17x_3 = 180.$$

En retirant la contrainte inactive, on trouve la même solution mais avec un nombre d'itérations plus faible (en l'occurrence, 5).

I.2. Second problème de logistique

Dans ce problème, on considère un différent problème de logistique. On optimise la livraison de marchandises : on minimise les coût de livraison, sous les contraintes de stocks maximum des entrepots, et des demandes des clients.

Formellement, le problème est défini comme :

$$\min_{\boldsymbol{v} \in \mathscr{M}_{M,N}(\mathbb{R})} \sum_{\substack{i \in [\![1, M]\!] \\ j \in [\![1, N]\!]}} c_{i,j} v_{i,j},$$

sous les contraintes :
- $\sum_{j \in [\![1,N]\!]} v_{i,j} \leq s_i$, quel que soit $j \in [\![1, M]\!]$,
- $\sum_{i \in [\![1,M]\!]} v_{i,j} = r_j$, quel que soit $i \in [\![1, N]\!]$,
- $v_{i,j} \geq 0$, quel que soient i et j.

On se place dans le cas de l'exemple donné par l'énoncé du TP, avec 2 entrepôts et 5 clients. De plus, on transforme la matrice $\boldsymbol{v}$ en le vecteur $\boldsymbol{x}$ par linéarisation.

On transforme les contraintes sous forme matricielle en posant les matrices :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{\text{éq}} = (\boldsymbol{I}_5 \mid \boldsymbol{I}_5),$$

et

$$\boldsymbol{b}_{\text{éq}} = (22 \;\; 38 \;\; 8 \;\; 44 \;\; 28)^{\mathsf{T}}.$$

On utilise une autre fois la fonction `linprog`, pour obtenir la solution optimale au problème reportée dans le Tableau 1.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
E_1	0	38	8	44	0
E_2	22	0	0	0	28

Tableau 1. Solution optimale au 2nd problème

Les contraintes en inégalité sont inactives : il reste du stock dans les deux entrepôts. Les commandes de chaque client ne seront expédiées que d'un entrepôt (aucun client ne reçoit des commandes provenant des deux entrepôts).

On multiplie par 5 les demandes des clients, ce qui revient à multiplier $\boldsymbol{b}_{\text{éq}}$ par 5. On trouve alors la solution présentée dans le Tableau 2. Dans ce cas, la contrainte sur le stock de l'entrepôt E_1 devient active, mais celle sur E_2 reste inactive. La commande du client C_4 est expédiée des deux entrepôts.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
E_1	0	0	0	200	0
E_2	110	190	40	20	130

Tableau 2. Solution optimale au 2nd problème (multiplié par 5)

Si, au lieu de multiplier par 5, on multipliait par 6, le problème n'a plus de solution (on commande 840 objets, mais le stock n'est que de 700).

II. Optimisation non linéaire

Après s'être intéressés à l'optimisation linéaire dans la section précédente, on s'intéresse à présent à l'optimisation *non* linéaire. Il s'agit de résoudre un problème de minimisation :

$$\min_{\boldsymbol{x} \in K \subset \mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}),$$

où l'ensemble K est défini par les contraintes :

- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$,
- $\boldsymbol{A}_{\text{éq}}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_{\text{éq}}$,
- $\text{lb} \leq \boldsymbol{x} \leq \text{ub}$,
- $c(\boldsymbol{x}) \leq 0$,
- et, $c_{\text{éq}}(\boldsymbol{x}) = 0$.

On considère les 4 problèmes définis dans le Tableau 6 (page 4). On résout chaque problème, dans l'ordre.

Dans les résultats des problèmes, on notera $\boldsymbol{x}_0$ le point initial, $\boldsymbol{x}^\star$ le point obtenu, $f(\boldsymbol{x}^\star)$ la valeur de f au point obtenu, et « nbi » le nombre d'itérations. On notera également « global » lorsqu'un minimum global a été trouvé, et « local » s'il s'agit d'un minimum local. On précisera si un minimum n'a pas été trouvé.

II.1. Problème non-linéaire nº 1.

Point $\boldsymbol{x}_0$	Point $\boldsymbol{x}^\star$	$f(\boldsymbol{x}^\star)$	nbi	type
$(0, \frac{1}{2})$	$(1; 0{,}0005)$	-3	11	global
$(5, 5)$	$(1; 0{,}0006)$	-3	15	global

Tableau 3. Résultats de la résolution du problème nº 1

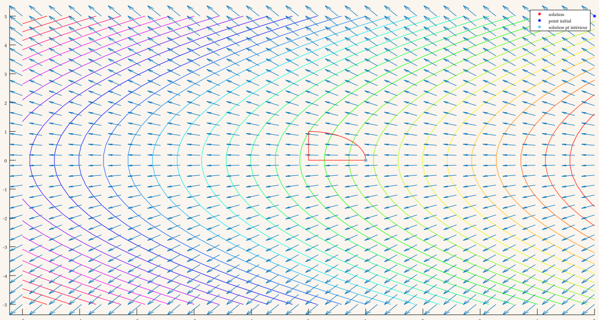

Figure 1. Résultat de la résolution du problème nº 1, avec $\boldsymbol{x}_0 = (0; 0{,}5)$

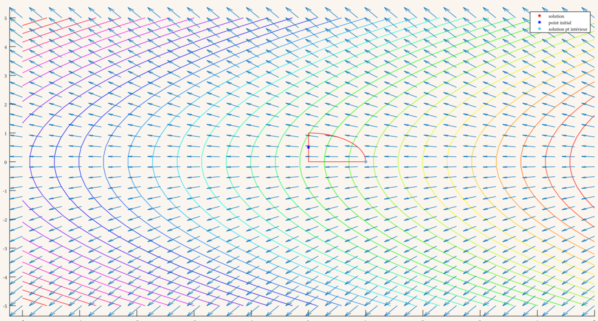

Figure 2. Résultat de la résolution du problème nº 1, avec $\boldsymbol{x}_0 = (5; 5)$

Le nombre d'itérations est relativement stable par rapport au point initial : il reste de l'ordre de la dizaine. Par exemple, pour $\boldsymbol{x}_0 = (150, 37)$, le minimum global sera trouvé en 19 itérations.

Avec $\boldsymbol{x}_0 = (20136, 25631)$, le minimum sera trouvé en 27 itérations.

II.2. Problème non-linéaire nº 2.

Point $\boldsymbol{x}_0$	Point $\boldsymbol{x}^\star$	$f(\boldsymbol{x}^\star)$	nbi	type
$(10, 10)$	$(0{,}9239; 0{,}3827)$	2,7574	9	global
$(0, -2)$	$(-0{,}9239; -0{,}3827)$	2,7574	8	global

Tableau 4. Résultats de la résolution du problème nº 2

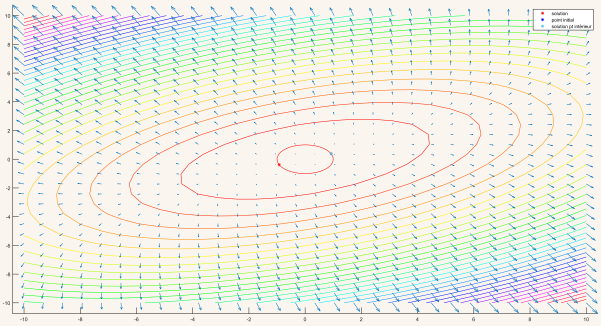

Figure 3. Résultat de la résolution du problème nº 2, avec $\boldsymbol{x}_0 = (10; 10)$

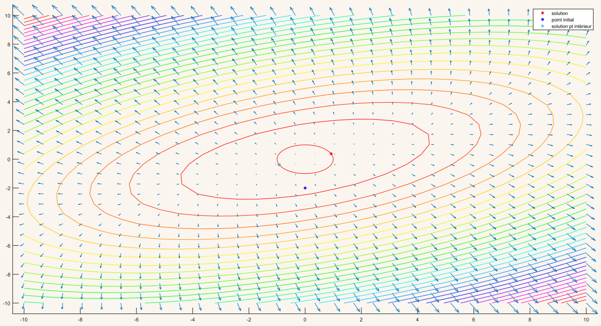

Figure 4. Résultat de la résolution du problème nº 2, avec $\boldsymbol{x}_0 = (0; -2)$

Si, comme dans ce problème, on a deux minima globaux, on ne peut pas prévoir à l'avance quel minimum on va obtenir. Il est donc important de bien connaître le nombre de minima globaux, ce qui permettrai de détecter l'ensemble des minima, et non un seul.

II.3. Problème non-linéaire nº 3.

Point $\boldsymbol{x}_0$	Point $\boldsymbol{x}^\star$	$f(\boldsymbol{x}^\star)$	nbi	type
$(-15, -15)$	Pas de min trouvé			
$(-5, -15)$	$(-5, 0)$	1980	9	local
$(0, -15)$	Pas de min trouvé			
$(-15, 15)$	$(8{,}3807; 9{,}4112)$	515	13	global
$(15, 15)$	$(8{,}3807; 9{,}4112)$	515	7	global

Tableau 5. Résultats de la résolution du problème nº 3

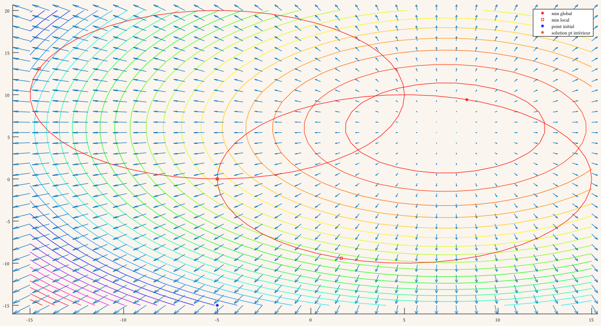

Figure 5. Résultat de la résolution du problème nº 3, avec $\boldsymbol{x}_0 = (-5; -15)$

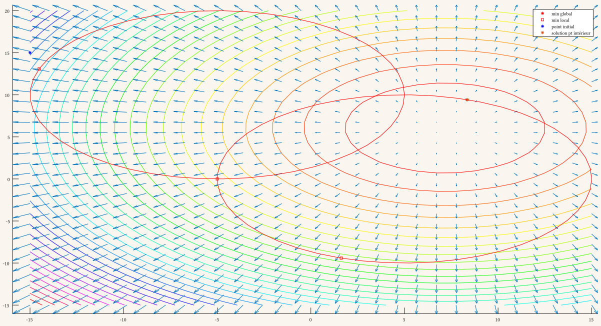

Figure 6. Résultat de la résolution du problème nº 3, avec $\boldsymbol{x}_0 = (-15; 15)$

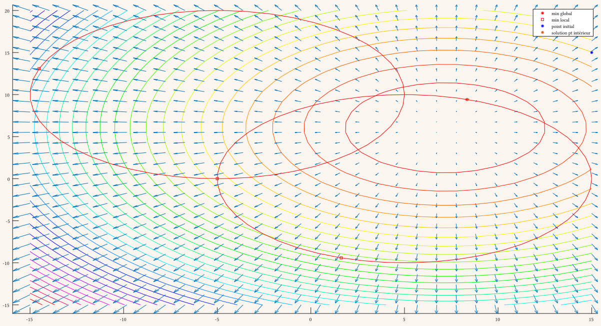

Figure 7. Résultat de la résolution du problème nº 3, avec $\boldsymbol{x}_0 = (15; 15)$

Dans ce problème de minimisation, les trois minima locaux mettent en difficulté la résolution du problème. En effet, la méthode converge parfois vers des minima locaux, au lieu du minimum global. De plus, parfois, la méthode ne converge pas.

Il est donc important de séparer les minima globaux et locaux, afin de pouvoir les distinguer séparément.

Pb.	Fonction J	Contraintes
1	$-3x_1 + \frac{x_2^2}{2}$	$0 \leq x_1, x_2$ $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$
2	$\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \rangle$	$\lVert \boldsymbol{v} \rVert^2 = 1$
3	$2\left((x_1 - 5)^2 + (x_2 - 10)^2\right) + 1{,}5\ \left((x_1 - 10)^2 + (x_2 - 5)^2\right)$ $+2\left(x_1^2 + (x_2 - 12)^2\right) + 3\left((x_1 - 12)^2 + x_2^2\right)$	$(x_1 + 5)^2 + (x_2 - 10)^2 \geq 100$ $(x_1 - 5)^2 + x_2^2 \geq 100$

Tableau 6. Problèmes d'optimisation non-linéaire considérés