Préparation Transfert et espace d'état

(a) D'après l'énoncé, nous avons l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}) : \quad \frac{\ddot{\alpha}}{\omega_0^2} + \alpha - \alpha_{\text{nom}} = Gu.$$

En posant le changement de variables $\tilde{\alpha} = \alpha - \alpha_{\text{nom}}$, et en remarquant que $\ddot{\tilde{\alpha}} = \ddot{\alpha}$, l'équation $(\mathbf{E})$ est équivalente à l'équation :

$$(\mathbf{E}') : \quad \frac{\ddot{\tilde{\alpha}}}{\omega_0^2} + \tilde{\alpha} = Gu.$$

De cette équation, on en déduit l'expression du transfert $\mathscr{L}h(s)$:

$$\mathscr{L}h(s) = \frac{s^2 + \omega_0^2}{G\omega_0^2}.$$

(b) On applique la relation suivante à la formule calculée précédemment :

$$\begin{aligned}
\mathscr{Z}\tilde{h}(z) &= \mathscr{L}h(B(z)) \\
&= \frac{\frac{4}{T_{\text{s}}^2} \cdot \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)^2 + \omega_0^2}{G\omega_0^2} \\
&= \frac{4}{T_{\text{s}}^2 \omega_0^2} \cdot \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + 2z^{-1} + z^{-2}} + \frac{1}{G},
\end{aligned}$$

où $T_{\text{s}} = 0{,}1\ \text{s}$, et ω_0 et G sont les valeurs données dans l'énoncé.

(c) On considère le vecteur d'état $\boldsymbol{x} = [\tilde{\alpha} \ \ \omega]^\top$, et on a les relations :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{x} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ G\omega_0^2 \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{B}} u$$

et

$$[\alpha] = \underbrace{[0 \ \ 1]}_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{x} + \underbrace{[0]}_{\boldsymbol{D}} u.$$

(d) On calcule $\tilde{\boldsymbol{A}}$ et $\widetilde{\boldsymbol{B}}$ en diagonalisant les matrices $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ avant de calculer respectivement

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \exp(\boldsymbol{A} T_{\text{s}}) \text{ et } \widetilde{\boldsymbol{B}} = \exp(\boldsymbol{B} T_{\text{s}}).$$